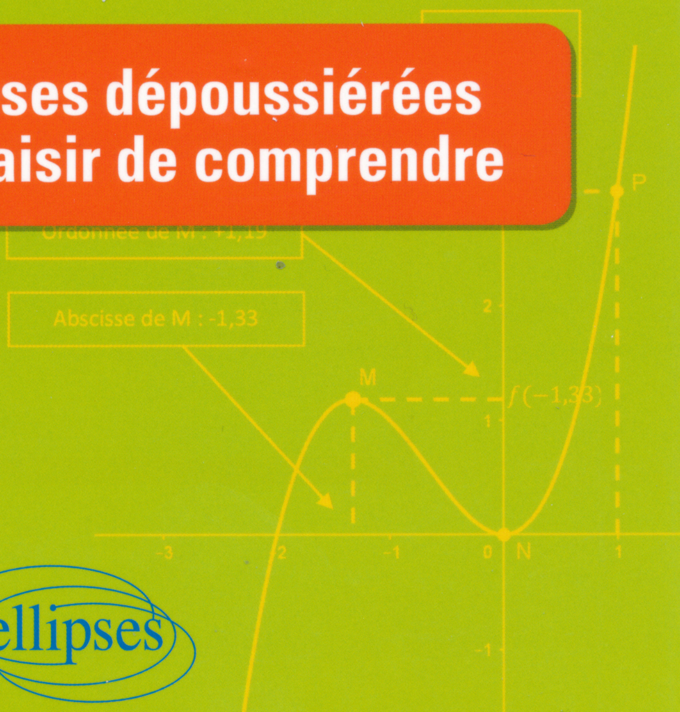
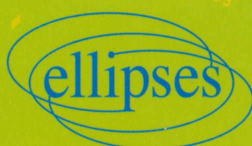
Jean-Marc Buret

Les maths expliquées simplement

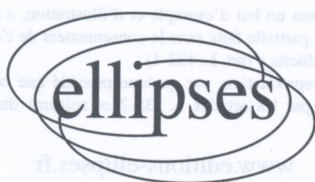
Les bases dépoussiérées et le plaisir de comprendre





Les maths expliquées simplement

Jean-Marc Buret



Introduction

À qui s'adresse ce livre ?

Bien que cette évidence n'apparaisse pas forcément comme telle, les mathématiques font partie de notre patrimoine commun.

Tout le monde a été en contact avec cette discipline durant sa scolarité. Rares sont les personnes qu'elle a laissées indifférentes. De l'élève passionné à l'élève traumatisé, en passant par le pragmatique qui constate que les maths sont considérées « par le système » comme importantes et méritent à ce titre son attention, la population scolaire est engagée dans une relation souvent forte avec cette matière.

Au-delà de la période scolaire, il existe plusieurs raisons qui poussent les gens à revenir vers les maths. On peut les regrouper en deux grandes catégories :

- Un impératif qui amène à se replonger dans des notions oubliées ou poussiéreuses : il peut s'agir par exemple de maîtriser un outil mathématique dans le cadre d'un usage professionnel ou de redécouvrir les programmes de collège pour aider son enfant.
- Un désir intellectuel de revenir vers la discipline, soit pour retrouver le plaisir de la pratiquer, soit pour maîtriser des notions anciennement problématiques et se réconcilier avec elles.

Au sein de ce public potentiel, cet ouvrage s'adresse à des gens ayant une maîtrise faible ou modérée des mathématiques et vise à accompagner le lecteur sur un chemin qui balaie des notions d'un niveau collège et lycée. Il convient de noter que ce livre ne suit pas une approche scolaire basée sur les programmes de l'Éducation nationale. Il s'autorise ainsi à faire des incursions « hors programme » sur des notions qui paraissent intéressantes ou au contraire à ne pas insister sur certains éléments. Ainsi, il exclut par exemple de son périmètre la géométrie, qui n'apparaît pas prioritaire pour un « redémarrage » des mathématiques.

La promenade proposée suppose donc acquises les notions du primaire (les quatre opérations sur des nombres entiers positifs) et serpente à travers l'algèbre (nombres, calcul littéral) et l'analyse (fonctions, dérivées, suites). Elle aborde également des éléments de logique et de raisonnement mathématique.

L'objectif premier de ce livre est de donner du sens et du plaisir à une redécouverte des maths.

Sommaire

Chapitre 1. Les nombres

Chapitre 2. Un peu d'arithmétique

Chapitre 3. Calcul numérique

Chapitre 4. Calcul littéral

Chapitre 5. Fonctions

Chapitre 6. Quelques fonctions classiques

Chapitre 7. Suites numériques

Chapitre 8. Proportionnalité

Chapitre 9. Un peu de raisonnement mathématique

Chapitre 1

Les nombres

1. Les entiers naturels

Notre relation avec les nombres commence dès la petite enfance avec l'acquisition de la capacité à compter les choses. On apprend à compter « jusqu'à dix », puis « jusqu'à cent » et ainsi de suite. Ce comptage se fait avec des nombres « entiers » car le petit enfant ne compte que des objets « entiers » sans les découper en morceaux.

En mathématiques, ces premiers nombres que l'on manipule sont appelés entiers naturels. Ainsi 0, 1, 2, 345, 1 077 sont des entiers naturels. L'ensemble des nombres entiers naturels est appelé $\mathbb{N}$. Cet ensemble est infini puisqu'il suffit d'ajouter 1 au dernier nombre considéré pour en créer un nouveau.

L'étude des entiers naturels est une discipline toujours en vigueur aujourd'hui, l'arithmétique, dont nous donnerons un aperçu dans le chapitre 2.

Après le comptage, on introduit le calcul à l'école primaire et les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division. Nous ne détaillerons pas ici ces différentes manipulations, considérées comme acquises.

L'addition et la multiplication ne posent pas de problèmes particuliers en termes algébriques.

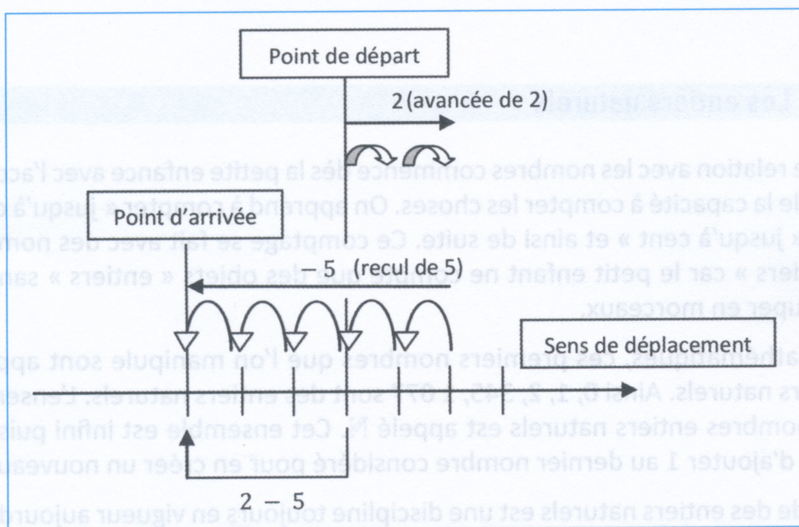
La soustraction pose un problème à l'écolier. En effet, certaines soustractions sont impossibles au sein de l'ensemble des entiers naturels. Ainsi comment calculer $2 - 5$?

De même, la division n'est pas toujours possible dans l'ensemble $\mathbb{N}$. Comment diviser 2 par 3 ?

Mener à bien ces calculs et être capable de nommer leur résultat nécessite l'introduction d'autres nombres.

2. Les entiers relatifs

La soustraction $2-5$ peut être vue de manière intuitive comme un déplacement sur une règle graduée ou sur un parcours de type « jeu de l'oie ». J'avance de 2 graduations ou de 2 cases et je recule de 5 graduations ou de 5 cases. Je me retrouve donc 3 graduations ou 3 cases avant mon point de départ. En mathématiques, on va donc considérer que le déplacement est de 3 et on va indiquer que l'on a « reculé » grâce au signe « – ».



On obtient donc $2-5=-3$.

On vient donc de créer -3, qui est un nombre négatif, que l'on lit « moins trois ».

À noter que dans l'égalité $2-5=-3$, les deux signes « – » n'ont pas la même signification. Le premier indique une opération, la soustraction. Le deuxième indique le signe du nombre.

On notera également que $5-2=+3=3$. En effet, si on adopte la même logique intuitive que ci-dessus, $5-2$ correspond à un déplacement de 3 « vers l'avant ». Puisque l'on indique « – » lorsqu'on « recule », il est cohérent d'indiquer « + »

lorsqu'on « avance ». Par souci d'économie, on considère que le « + » n'est pas obligatoire et que son absence indique un nombre positif.

En ajoutant un signe « – » devant tout nombre entier naturel, on obtient un entier négatif. L'ensemble des nombres entiers, qu'ils soient positifs ou négatifs s'appelle l'ensemble des entiers relatifs. On l'appelle $\mathbb{Z}$.

Contrairement aux entiers naturels, les entiers relatifs constituent donc un ensemble dans lequel toutes les additions et soustractions sont possibles.

Pour aller plus loin

Ce dernier point, rendre les opérations possibles, peut paraître anodin mais il est essentiel en algèbre car il introduit la notion de loi de composition interne à un ensemble qui permet la définition des premières structures algébriques. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre de l'enseignement supérieur.

Un entier relatif se compose donc d'un nombre entier naturel précédé d'un signe, ce signe pouvant être omis s'il est positif. Le nombre entier naturel se nomme distance à zéro au collège et valeur absolue par la suite. Ainsi, 567 a pour distance à zéro 567 et –12 a pour distance à zéro 12. La valeur absolue se note entre deux traits verticaux. Ainsi $|567| = 567$ et $|-12| = 12$

Vocabulaire complémentaire

L'opposé d'un nombre est un nombre qui a la même distance à zéro (même valeur absolue) et un signe contraire. Par exemple –3 est l'opposé de 3, 5 est l'opposé de –5.

Remarque On note l'opposé également avec un signe « – », ce qui ne simplifie pas forcément la compréhension de l'écriture mathématique. En effet –3 désigne à la fois le nombre négatif (lu « moins trois ») et l'opposé du nombre 3. L'écriture $-(-3)$ désigne l'opposé du nombre –3. D'après ce qui précède, il s'agit du nombre qui a la même valeur absolue que –3 et un signe opposé, c'est-à-dire +3 ou plus simplement 3. On a donc $-(-3) = 3$, le premier « – » signifiant « opposé » et le deuxième étant le signe du nombre négatif –3.

3. Les nombres décimaux

Au primaire, on apprend la division « à virgule » et on introduit les nombres décimaux. Ainsi $7 \div 2 = 3{,}5$. Le nombre décimal est composé d'une partie entière située avant la virgule et d'une partie décimale, située après la virgule.

L'ensemble des nombres décimaux est appelé $\mathbb{D}$.

L'écriture décimale est pratique et permet en outre de préciser la compréhension de la division à l'école. L'enfant peut désormais découper les objets en morceaux.

On verra plus avant dans ce livre, à la fin du chapitre 3, la manière plus « mathématique » de définir un nombre décimal.

Cependant, algébriquement parlant, les nombres décimaux ne présentent pas un très grand intérêt. En particulier, ils ne permettent pas de donner le résultat de toutes les divisions. Par exemple 2 divisé par 3 ne peut pas s'écrire sous forme décimale, puisque la suite des nombres figurant après la virgule est infinie. On peut rencontrer la notation 0,666... les points de suspension signifiant que l'on répète le « 6 » indéfiniment. Mais ce système ne peut représenter tous les quotients. Par exemple un nombre dans lequel le schéma qui se répète après la virgule comporte un nombre élevé de chiffres ne peut en pratique pas être représenté de cette manière.

4. Les nombres rationnels

Il faut donc introduire de nouveaux nombres, que l'on appelle les nombres rationnels. On écrit alors $\frac{2}{3}$, qui se lit « deux tiers » ou « deux sur trois ». $\frac{2}{3}$ est donc le nombre créé pour indiquer le résultat de la division de 2 par 3. En d'autres termes, $\frac{2}{3}$ est le nombre qui multiplié par 3 donne 2.

Pour ce qui est du vocabulaire, le trait horizontal s'appelle un trait de fraction, le nombre situé au-dessus est le numérateur et le nombre situé au-dessous est le dénominateur. Pour éviter de confondre ces deux termes, il faut comprendre leur signification. $\frac{5}{7}$ se lit « cinq septièmes ». Le nombre situé au-dessous du trait de fraction donne donc son nom au nombre rationnel (il s'agit de septièmes), d'où l'appellation de dénominateur (il « nomme »). Le nombre situé au-dessus du trait de fraction indique combien le nombre rationnel contient de septièmes, il s'agit du numérateur (il « numérote »).

Un nombre rationnel est donc une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un nombre entier par un nombre entier. À noter que ces nombres entiers peuvent être positifs ou négatifs. $\frac{-5}{7}$ désigne ainsi le résultat de la division de –5 par 7. On verra plus avant dans ce livre, dans le paragraphe 2.2 du chapitre 3, comment mener des calculs avec des nombres négatifs et avec des fractions.

L'ensemble des nombres rationnels est appelé $\mathbb{Q}$. Il est celui qui permet de rendre possible toutes les divisions de nombres entiers.

Pour aller plus loin

De même que pour l'introduction de l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce point est également essentiel en algèbre car il introduit la notion de corps. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre de l'enseignement supérieur.

Remarque On généralise la notion de fraction à celle d'écriture fractionnaire, qui consiste à utiliser un trait de fraction pour indiquer une division. Ainsi $2{,}5 \div 1{,}6 = \frac{2{,}5}{1{,}6} = 1{,}5625$. $\frac{2{,}5}{1{,}6}$ est une écriture fractionnaire mais n'est pas une fraction, puisque 2,5 et 1,6 ne sont pas des entiers.

5. Les nombres réels

Bien que résolvant le problème de la division, l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne permet pas de décrire tous les nombres. En effet, certains nombres ne sont pas le résultat de la division d'un nombre entier par un nombre entier.

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent irrationnels. On peut par exemple citer le nombre π (lire « pi »), connu depuis l'antiquité, qui intervient notamment dans le calcul du périmètre d'un cercle. Un autre exemple de nombre irrationnel est $\sqrt{2}$ (lire « racine carrée de 2 » ou « racine de 2 »). On verra plus avant dans ce livre, dans le paragraphe 4.1.1. du chapitre 4, la signification d'une racine carrée. Le caractère irrationnel de $\sqrt{2}$ est démontré dans le paragraphe 5 du chapitre 9.

À noter qu'il existe une infinité de nombres irrationnels et qu'entre deux nombres rationnels, on peut toujours trouver des nombres irrationnels. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est donc « à trous ».

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels. Il est appelé $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ permet de « compléter » l'ensemble des nombres. Il n'existe alors plus de « trou » entre deux nombres.

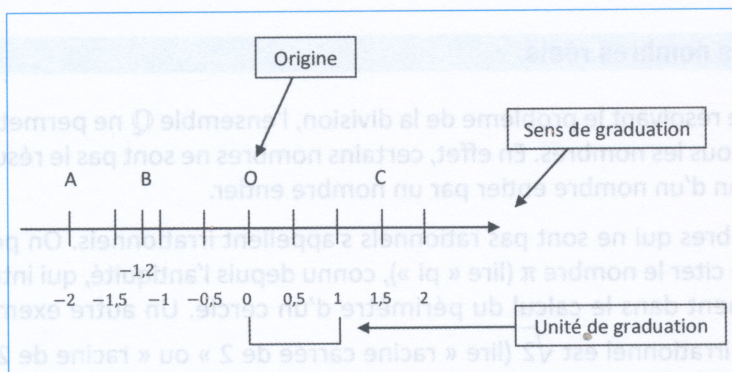
Pour aller plus loin

L'ensemble $\mathbb{R}$ est la base de la branche des mathématiques appelée analyse, qui s'intéresse en particulier à ce qu'il se passe « à la limite » de l'ensemble des nombres, quand les nombres étudiés ou intervenant dans des calculs deviennent infiniment petits ou infiniment grands. Nous aborderons quelques notions d'analyse, en particulier dans le chapitre sur les fonctions et dans celui sur les suites. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'analyse de l'enseignement supérieur.

6. Repérage

Une utilisation des nombres qui nous sera utile par la suite est le repérage de points sur une représentation graphique.

6.1. Repérage sur un axe gradué



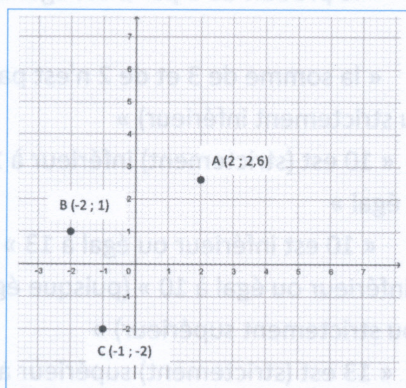
Un axe gradué est défini par :

- une origine, à partir de laquelle on compte les graduations, ici le point O ;
- une unité de graduation : la longueur séparant la graduation 0 de la graduation 1 ;
- un sens de graduation, qui permet de déterminer dans quel sens on compte positivement.

Un point est repéré sur l'axe par un nombre appelé abscisse. Dans le schéma ci-dessus, A a pour abscisse −2, B a pour abscisse −1,2 et C a pour abscisse 1,5.

6.2. Repérage en deux dimensions

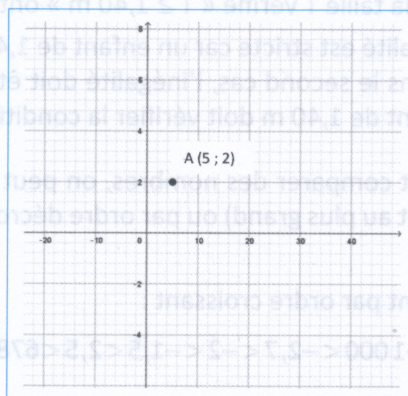
Le repérage sur une surface plane nécessite deux axes gradués. L'axe horizontal s'appelle l'axe des abscisses. Le second axe est celui des ordonnées. Un point est alors repéré par ses coordonnées, que l'on indique entre parenthèses, séparées par un point-virgule. L'abscisse est indiquée en premier.



Dans la figure précédente, le point A a pour coordonnées (2 ; 2,6), le point B a pour abscisse −2 et le point C a pour ordonnée −2.

Vocabulaire complémentaire

Si les deux axes sont perpendiculaires et utilisent la même unité de graduation, comme dans la figure ci-dessus, on dit que le repère est orthonormé. Si les deux axes sont perpendiculaires mais n'utilisent pas la même unité de graduation, on parle de repère orthogonal. À titre d'illustration, voici un exemple de repère orthogonal, non orthonormé (l'unité sur l'axe des ordonnées est cinq fois plus grande que celle utilisée sur l'axe des abscisses) :



7. Comparaison

Les nombres peuvent être comparés entre eux. Les différents symboles utilisés pour les comparer sont les suivants :

- $=$ « égal »

  Exemple $3 \times 2 = 6$ « le produit de 3 par 2 est égal à 6 »

- $\neq$ « non égal »

  Exemple $3 + 2 \neq 6$ « la somme de 3 et de 2 n'est pas égale à 6 »

- $<$ « inférieur (ou strictement inférieur) »

  Exemple $10 < 13$ « 10 est (strictement) inférieur à 13 »

- $\leq$ « inférieur ou égal »

  Exemples $10 \leq 13$ « 10 est inférieur ou égal à 13 » (puisque inférieur)

  $10 \leq 10$ « 10 est inférieur ou égal à 10 » (puisque égal)

- $>$ « supérieur (ou strictement supérieur) »

  Exemple $13 > 10$ « 13 est (strictement) supérieur à 10 »

- $\geq$ « supérieur ou égal »

  Exemples $13 \geq 10$ « 13 est supérieur ou égal à 10 » (puisque supérieur)

  $10 \geq 10$ « 10 est supérieur ou égal à 10 » (puisque égal)

Note On pourrait questionner l'utilité des symboles $\leq$ et $\geq$ puisque l'on dispose de symboles donnant plus de précisions : $=$, $<$ et $>$. Leur intérêt vient du fait que dans la vie réelle, une situation n'est pas forcément modélisée par une égalité ou par une inégalité stricte (ne permettant pas l'égalité). À titre d'illustration, un parc d'attractions peut interdire l'accès à un manège aux enfants dont la taille est inférieure à 1,40 m. On peut exprimer cette contrainte en langage mathématique par :

➞ Les enfants dont la taille T vérifie « $T < 1{,}40$ m » n'ont pas accès au manège.

➞ Les enfants dont la taille T vérifie « $T \geq 1{,}40$ m » ont accès au manège.

Dans le 1er cas l'inégalité est stricte car un enfant de 1,40 m ne doit pas vérifier la condition. Dans le second cas, l'inégalité doit être large (permettant l'égalité) car un enfant de 1,40 m doit vérifier la condition.

Une fois que l'on peut comparer des nombres, on peut les classer par ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou par ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

Exemple de classement par ordre croissant :

$$-1\,000 < -2{,}7 < -2 < -1{,}5 < 2{,}5 < 678$$

La notion de valeur absolue que nous avons définie au sujet des nombres entiers se généralise à tout nombre réel et on notera que plus la valeur absolue d'un nombre positif est grande, plus ce nombre est grand. Au contraire, plus la valeur absolue d'un nombre négatif est grande, plus ce nombre est petit.

Dernière remarque Il existe une légère ambiguïté sur le terme « petit » qui n'est pas gênante lorsqu'on connaît le contexte dans lequel le mot est utilisé. Lorsqu'il s'agit de classer des nombres, « plus petit que » signifie « inférieur ». Dans ce sens, –1 000 est plus petit que –2. En revanche lorsqu'on s'intéresse à des nombres « très petits » sans contexte de comparaison, on fait référence à des nombres très proches de zéro, qu'ils soient d'ailleurs négatifs ou positifs. –1 000 n'est dans ce sens pas un « petit nombre » comparé à 0,0001 qui lui est pourtant supérieur mais bien plus proche de zéro.

Pour aller plus loin

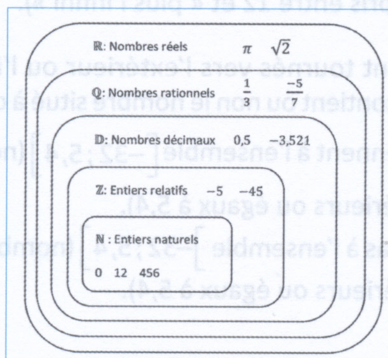
En termes mathématiques, on parle de relation d'ordre, le concept de comparaison pouvant s'appliquer à d'autres objets que des nombres. La définition des différents types de relations pouvant exister entre des éléments mathématiques fait partie de la théorie des ensembles. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre de l'enseignement supérieur.

8. Ensembles de nombres

8.1. Classification algébrique

Les nombres sont classés dans différents ensembles emboîtés les uns dans les autres. Cette classification naît des caractéristiques algébriques de ces nombres.

On peut synthétiser les différents ensembles dans le schéma suivant :



- Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs (ce sont les entiers relatifs positifs).
- Tous les entiers sont des nombres décimaux (45 peut s'écrire « avec une virgule », par exemple 45,0) et des nombres rationnels (45 peut aussi s'écrire comme une fraction, par exemple $\frac{45}{1}$ ou $\frac{90}{2}$).
- Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels (3,5 peut s'écrire sous forme de fraction, par exemple $\frac{7}{2}$).
- Tous les nombres rationnels sont des nombres réels.

8.2. Compléments

D'autres notations permettent de décrire de manière plus fine des ensembles de nombres.

- Si l'on veut décrire un ensemble limité de nombres, par exemple les résultats obtenus par le lancer d'un dé à six faces, on utilise des accolades. Entre les accolades figurent les différentes valeurs des nombres appartenant à l'ensemble considéré, séparées par un point-virgule. Ainsi, dans le cas du lancer de dé, l'ensemble E des résultats possibles est $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- Si l'on veut exclure certaines valeurs d'un ensemble, on utilise le symbole « \ ». Ainsi :
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres réels non entiers.
  - $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- Si l'on veut considérer tous les nombres réels compris entre certaines valeurs, on utilise des crochets.
  - $\left[-32 ; 5{,}4\right]$ désigne l'ensemble des nombres réels compris entre –32 et 5,4.
  - $\left]-\infty ; 12\right]$ correspond à l'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 12 (compris entre « moins l'infini » et 12).
  - $\left[12 ; +\infty\right[$ correspond à l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 12 (compris entre 12 et « plus l'infini »).

Note Les crochets sont tournés vers l'extérieur ou l'intérieur suivant que l'ensemble considéré contient ou non le nombre situé à côté du crochet. Ainsi :

➞ –32 et 5,4 appartiennent à l'ensemble $\left[-32 ; 5{,}4\right]$ (nombres supérieurs ou égaux à –32 et inférieurs ou égaux à 5,4).

➞ –32 n'appartient pas à l'ensemble $\left]-32 ; 5{,}4\right]$ (nombres strictement supérieurs à –32 et inférieurs ou égaux à 5,4).

- 5,4 n'appartient pas à l'ensemble $[-32\,;5{,}4[$ (nombres supérieurs ou égaux à –32 et strictement inférieurs à 5,4).
- –32 et 5,4 n'appartiennent pas à l'ensemble $]-32\,;5{,}4[$ (nombres strictement supérieurs à –32 et strictement inférieurs à 5,4).

Ce type d'ensemble qui contient tous les nombres réels compris entre certaines valeurs s'appelle un **intervalle**.

Pour aller plus loin

La notion d'intervalle est liée à la notion mathématique plus générale de connexité. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'analyse de l'enseignement supérieur, traitant plus précisément de topologie.

- Si l'on veut regrouper des ensembles on utilise le symbole « $\cup$ », qui se lit « union ». Ainsi :
  - $\mathbb{N}\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$ correspond à un ensemble constitué de tous les entiers naturels et du nombre $\frac{1}{3}$.
  - $[-4\,;1]\cup[2\,;12]$ correspond à l'ensemble des nombres réels compris entre –4 et 1 ou bien entre 2 et 12.
- Si l'on veut déterminer les nombres appartenant simultanément à deux ensembles, on utilise le symbole « $\cap$ » qui se lit « inter » (comme intersection). Ainsi :
  $[-4\,;12]\cap[2\,;15]$ correspond à l'ensemble des nombres réels qui sont à la fois compris entre –4 et 12 et entre 2 et 15. Il s'agit donc des nombres compris entre 2 et 12. En d'autres termes $[-4\,;12]\cap[2\,;15]=[2\,;12]$
- Un symbole spécifique existe pour traduire l'appartenance d'un nombre à un ensemble : « $\in$ ». Ainsi $1\in\{1\,;2\,;3\}$, $\frac{1}{3}\in\,]0\,;1[$ et $\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$.
- Enfin, le symbole $\varnothing$ indique un ensemble vide, c'est-à-dire qui ne contient aucun élément. Par exemple $]-\infty\,;-1]\cap\mathbb{N}=\varnothing$. En effet, aucun nombre n'est à la fois plus petit que –1 et un entier naturel (puisque ceux-ci sont tous positifs).

Chapitre 2

Un peu d'arithmétique

Dans tout ce chapitre on ne s'intéresse qu'à des nombres entiers naturels.

1. Puissance

Lorsque l'on multiplie un nombre par lui-même deux fois, on dit que l'on élève ce nombre au carré. Ainsi $4 \times 4 = 16$ est le carré de 4. On le note 4^2 que l'on lit « Quatre au carré » ou « Quatre puissance 2 ».

Lorsque l'on multiplie un nombre par lui-même trois fois, on dit que l'on élève ce nombre au cube. Ainsi $4 \times 4 \times 4 = 64$ est le cube de 4. On le note 4^3 que l'on lit « Quatre au cube » ou « Quatre puissance 3 ».

Lorsque l'on multiplie un nombre par lui-même « *n* » fois, où *n* est un entier naturel quelconque, on dit que l'on élève ce nombre à la puissance *n*. Ainsi $\underbrace{4 \times 4 \times \ldots \times 4 \times 4 = 4^n}_{n \text{ fois}}$ se lit « Quatre puissance *n* ».

On notera qu'élever un nombre à la puissance 1 revient à ne rien faire : tout nombre élevé à la puissance 1 est égal à lui-même. Ainsi $4^1 = 4$.

Par convention tout nombre élevé à la puissance 0 est égal à 1.

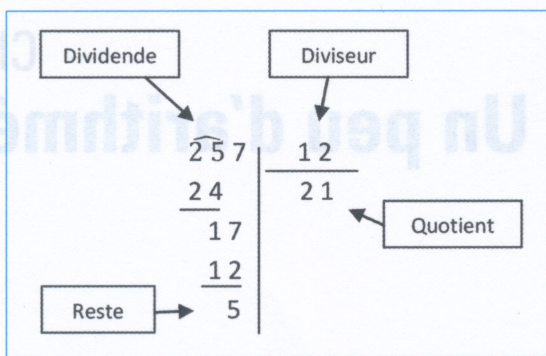
Ainsi $1^0 = 2^0 = 435^0 = 1$

Note Un léger débat existe quant à la définition de 0^0. En algèbre et en ce qui nous concerne, nous adopterons la convention $0^0 = 1$, qui de toute manière n'interviendra pas réellement de manière pratique dans cet ouvrage.

2. La division euclidienne

Revenons à la division enseignée à l'école primaire, avant que les nombres décimaux n'interviennent.

On divise par exemple 257 par 12.



On a l'égalité : $257 = 12 \times 21 + 5$.

Et plus généralement : Dividende = Diviseur × Quotient + Reste.

Tous les nombres considérés sont bien des entiers naturels. La division « avec reste » de l'école primaire qui s'appelle en mathématiques la division euclidienne (du nom du célèbre mathématicien grec Euclide) est une opération qui se déroule au sein de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Par définition de la division euclidienne, le reste est toujours strictement inférieur au diviseur (dans le cas contraire, on continuerait la division). Il s'agit donc d'un nombre compris entre zéro et le diviseur. $0 \leq$ Reste $<$ Diviseur (la première inégalité est large car le reste peut être nul).

Pour un dividende et un diviseur donnés, le quotient et le reste sont alors déterminés de manière unique.

3. Diviseur et Multiple

En algèbre et plus particulièrement en arithmétique, branche qui ne s'intéresse qu'aux nombres entiers, le vocabulaire est légèrement différent puisque l'on utilise le terme de « diviseur » uniquement lorsque le reste de la division euclidienne est égal à zéro. Ainsi, dans l'égalité $257 = 12 \times 21 + 5$, le nombre 12 est celui qui divise, mais le reste « 5 » n'est pas égal à zéro et donc 12 n'est pas un diviseur de 257 au sens algébrique du terme. À titre d'illustration, $252 = 12 \times 21$, le reste de cette division euclidienne est nul, et donc 12 est un diviseur de 252.

La notion réciproque du diviseur est celle de multiple. 12 étant un diviseur de 252, on dit que 252 est un multiple de 12.

3.1. Critère de divisibilité

Des critères existent pour savoir si un nombre est un multiple d'un autre nombre, c'est-à-dire pour savoir s'il est divisible par cet autre nombre, sans procéder à la division.

Le tableau ci-dessous résume les critères de divisibilité les plus classiques.

Nombre	Critère	Illustration
2	Un nombre est multiple de 2 s'il se termine par un chiffre pair : 0, 2 4, 6 ou 8	2 386 est divisible par 2 (6 est un chiffre pair) 327 n'est pas divisible par 2 (7 est un nombre impair)
3	Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 3	258 est un multiple de 3 car $2 + 5 + 8 = 15$, multiple de 3 ($15 = 3 \times 5$) 451 n'est pas un multiple de 3 car $4 + 5 + 1 = 10$, qui n'est pas multiple de 3
4	Un nombre est multiple de 4 si les deux derniers chiffres qui le composent forment un multiple de 4	5 612 est un multiple de 4 car 12 est un multiple de 4 ($12 = 4 \times 3$) 9 818 n'est pas un multiple de 4 car 18 n'est pas un multiple de 4
5	Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5	895 est un multiple de 5 856 n'est pas un multiple de 5
6	Un nombre est multiple de 6 s'il vérifie à la fois les critères de divisibilité par 2 et par 3	1 056 est divisible par 6 car il se termine par 6 et car $1 + 0 + 5 + 6 = 12$
9	Un nombre est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 9	558 est un multiple de 9 car $5 + 5 + 8 = 18$, multiple de 9 ($18 = 9 \times 2$) 258 n'est pas un multiple de 9 car $2 + 5 + 8 = 15$, qui n'est pas multiple de 9
10	Un nombre est multiple de 10 s'il se termine par 0	80 est un multiple de 10 85 n'est pas un multiple de 10

Le critère de divisibilité par 11 est un petit peu plus compliqué :

- Il faut additionner un chiffre sur deux parmi ceux qui composent le nombre,
- puis additionner les chiffres restants,
- puis faire la différence de ces deux sommes.

Si le résultat obtenu est un multiple de 11, le nombre considéré est un multiple de 11. Dans le cas contraire, le nombre n'est pas un multiple de 11.

Illustration 206 486 788 893 est un multiple de 11.

- Additionnons un chiffre sur deux : $2 + 6 + 8 + 7 + 8 + 9 = 40$
- Additionnons les autres chiffres : $0 + 4 + 6 + 8 + 8 + 3 = 29$
- $40 - 29 = 11$, qui est multiple de 11.

On vérifie que $206\,486\,788\,893 = 11 \times 18\,771\,526\,263$

3.2. Identification des diviseurs d'un nombre

Pour identifier tous les diviseurs d'un nombre, il faut vérifier que les nombres considérés dans l'ordre croissant à partir de 1 le divisent.

Exemple 48

Nombre	Diviseur de 48 ?	Quotient
1	Oui $48 = 1 \times 48$	48
2	Oui $48 = 2 \times 24$	24
3	Oui $48 = 3 \times 16$	16
4	Oui $48 = 4 \times 12$	12
5	Non (voir critère de divisibilité)	–
6	Oui $48 = 6 \times 8$	8
7	Non (48 n'est pas dans la table de multiplication de 7)	–

Les diviseurs de 48, classés par ordre croissant, sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

Deux remarques

- Les diviseurs vont toujours par deux. Si un nombre est un diviseur, le quotient correspondant est également un diviseur. On identifie donc les diviseurs « par paire ». Dans le cas de 48 on a comme paires 1 et 48, 2 et 24, 3 et 16, etc. Éventuellement, la paire peut être constituée d'un seul et même nombre, par exemple 9 divise 81 et $9 \times 9 = 81$, le quotient de 81 par 9 est donc 9 lui-même.
- Il n'est pas nécessaire de vérifier que tous les nombres sont des diviseurs. Une fois que l'on a atteint un nombre dont le carré est supérieur ou égal au nombre étudié, on peut arrêter le processus. Dans l'exemple précédent, on s'arrête à 7 car $7^2 = 7 \times 7 = 49$, qui dépasse 48. On est alors sûr d'avoir trouvé tous les diviseurs. Il est inutile de vérifier pour les nombres au-delà de 7 : 8 (déjà identifié comme diviseur), 9, 10, 11, 12 (déjà identifié) 13, 14, etc. En effet, si un nombre plus grand que 7 divise 48, cela entraîne que le quotient qui lui correspond est plus petit que 7 (sinon le produit des deux serait supérieur à 7×7, lui-même supérieur à 48, ce qui n'est pas possible). Mais dans ce cas, ce quotient a déjà été déterminé comme

diviseur de 48 inférieur à 7. Et la paire diviseur-quotient a donc déjà été identifiée.

4. Nombres premiers

Un nombre premier est un entier naturel qui est supérieur ou égal à 2 et qui n'admet que 1 et lui-même comme diviseurs.

Par exemple :

- 3 est un nombre premier car aucun nombre autre que 1 ou 3 ne le divise. On ne peut pas écrire d'autre produit que $3=3\times1$
- 4 n'est pas un nombre premier puisque $4=2\times2$ et donc 4 admet un diviseur, en l'occurrence 2, différent de 1 et de 4.
- Les nombres premiers inférieurs à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et 47.

On démontre (et nous admettrons dans ce livre) qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Les nombres premiers peuvent être considérés comme une sorte « d'alphabet » pour les nombres entiers naturels. En effet, on démontre également que tout nombre entier naturel peut s'écrire comme le produit de puissances de nombres entiers et ce, de manière unique. Ainsi, de la même manière qu'un mot s'écrit en assemblant des lettres, un entier naturel peut se décomposer en nombres premiers.

À titre d'exemple, considérons le nombre 360.

Il est facile de vérifier $360=8\times9\times5$. Or $8=2^3, 9=3^2, 5=5^1$. On a donc : $360=2^3\times3^2\times5$. On a bien décomposé 360 comme un produit de puissances des nombres entiers 2, 3 et 5.

Ce résultat est appelé le théorème fondamental de l'arithmétique.

Pour déterminer la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, il faut vérifier que les nombres premiers, pris par ordre croissant à partir de 2, le divisent puis divisent successivement les quotients obtenus.

Exemple 693

Nombre premier	Diviseur successif ?	Quotient obtenu
2	Non (2 ne divise pas 693)	–
3	Oui $693 = 3 \times 231$	231
3	Oui $231 = 3 \times 77$	77
3	Non (3 ne divise pas 77)	–
5	Non (5 ne divise pas 77)	–

Nombre premier	Diviseur successif ?	Quotient obtenu
7	Oui $77 = 7 \times 11$	11
11	Oui $11 = 11 \times 1$	1

On arrête le processus lorsque l'on obtient 1 comme quotient.

On observe alors les divisions successives en considérant les diviseurs et le nombre de fois qu'ils ont successivement divisé les quotients :
On obtient $693 = 3^2 \times 7^1 \times 11^1 = 3^2 \times 7 \times 11$

- 3 est élevé à la puissance 2 car il a donné lieu à deux divisions successives.
- 7 et 11 sont élevés à la puissance 1 car ils n'ont donné lieu qu'à une division.

Remarque 2 et 5 (et les nombres premiers supérieurs à 11) ne sont pas intervenus. En d'autres termes, ils ont donné lieu à « zéro » division. La formule de décomposition reste cohérente avec des puissances nulles, de par la convention présentée précédemment dans le paragraphe « Puissances » :

$$693 = 2^0 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^1 = 1 \times 3^2 \times 1 \times 7 \times 11 = 3^2 \times 7 \times 11$$

À noter également que la décomposition en facteurs premiers permet de déterminer la liste exhaustive des diviseurs d'un nombre. En effet, il suffit de construire toutes les combinaisons possibles, en faisant varier la puissance à laquelle on élève chaque facteur premier de zéro à la puissance qui est la sienne dans la décomposition du nombre. À titre d'illustration, on a vu que les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48. Retrouvons ce résultat en utilisant la décomposition en facteurs premiers de $48 = 2^4 \times 3$. Dans cette écriture, 2 est à la puissance 4 et 3 à la puissance 1. On va considérer toutes les combinaisons, la puissance de 2 variant de 0 à 4 et la puissance de 3 variant de 0 à 1.

$2^0 \times 3^0 = 1 \times 1 = 1$	$2^0 \times 3^1 = 1 \times 3 = 3$
$2^1 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$	$2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$
$2^2 \times 3^0 = 4 \times 1 = 4$	$2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$
$2^3 \times 3^0 = 8 \times 1 = 8$	$2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$
$2^4 \times 3^0 = 16 \times 1 = 16$	$2^4 \times 3^1 = 16 \times 3 = 48$

On a bien reconstruit la liste des diviseurs de 48 à partir de sa décomposition en facteurs premiers.

5. Plus grand commun diviseur

Le Plus Grand Commun Diviseur (abrégé en pgcd) de deux nombres est, comme son nom l'indique, le plus grand nombre qui divise simultanément les deux nombres considérés.

5.1. Calcul du pgcd

Considérons deux nombres, par exemple 48 et 60. D'après ce qui précède, on dispose de deux méthodes pour déterminer leur pgcd.

On peut faire la liste des diviseurs de chacun des nombres :

- Pour 48 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48
- Pour 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60

On constate que le plus grand nombre qui appartient à ces deux listes est 12. 12 est donc le pgcd de 48 et 60. On le note pgcd (48, 60) ou $48 \wedge 60$

On peut également décomposer ces deux nombres en facteurs premiers : $48 = 2^4 \times 3$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

On en déduit la décomposition en facteurs premiers du pgcd, obtenue en considérant les facteurs premiers communs et en conservant la plus petite puissance de chacun d'entre eux. Dans notre cas, les facteurs qui apparaissent dans les deux décompositions sont 2 et 3. 2 est élevé à la puissance 4 dans la décomposition de 48 et à la puissance 2 dans celle de 60, sa plus petite puissance est donc 2. De même, la plus petite puissance pour 3 est 1. La décomposition du pgcd est donc $2^2 \times 3 = 12$. On retrouve bien :
pgcd (48, 60) $= 48 \wedge 60 = 12$.

Une troisième méthode est donnée par l'algorithme d'Euclide. Elle se décompose en une suite de divisions euclidiennes. La première division consiste à diviser le plus grand des deux nombres dont on cherche le pgcd par le plus petit. À chaque étape, on considère comme nouveau dividende le diviseur de la division précédente et comme nouveau diviseur le reste de la division précédente. Le processus s'arrête lorsque l'on obtient un reste nul. Le pgcd est alors donné par le dernier diviseur utilisé, c'est-à-dire le dernier reste non nul.

Dans le cas de 48 et 60 :

- Étape 1 : Division euclidienne de 60 par 48, nombres dont on cherche à déterminer le pgcd. $60 = 48 \times 1 + 12$.
- Étape 2 : Division euclidienne du diviseur précédent, c'est-à-dire 48 par le reste précédent, c'est-à-dire 12. $48 = 12 \times 4 + 0$.

On obtient un reste nul, donc on arrête le processus. Le pgcd cherché est le dernier reste non nul, c'est-à-dire 12.

Exemple Algorithme avec un nombre d'étapes plus important :

Calculons le pgcd de 5 678 et 1 240.

$5\,678 = 1\,240 \times 4 + 718$ — 1re division euclidienne

$1\,240 = 718 \times 1 + 522$

$718 = 522 \times 1 + 196$

$522 = 196 \times 2 + 130$

$196 = 130 \times 1 + 66$

$130 = 66 \times 1 + 64$

À chaque étape, le dividende est remplacé par le diviseur précédent et le diviseur est remplacé par le reste précédent.

$66 = 64 \times 1 + 2$ — Dernier reste non nul : 2.

$64 = 2 \times 32 + 0$ — Reste nul : Fin du processus.

On obtient pgcd (5 678, 1 240) = 2

On notera que si un nombre divise un autre nombre, il est le pgcd des deux. Ainsi, 5 divise 30, donc 5 est le pgcd de 5 et 30.

5.2. Nombres premiers entre eux

Lorsque deux nombres n'ont que le chiffre 1 comme diviseur commun, on dit qu'ils sont premiers entre eux. En d'autres termes, deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur plus grand commun diviseur est 1.

Ainsi 40 et 63 sont premiers entre eux, pgcd (40, 63) = 1. Ce résultat peut être établi par les trois méthodes exposées au paragraphe précédent.

- Diviseurs de 40 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40
- Diviseurs de 63 : 1, 3, 7, 9, 21, 63.

→ On constate que 1 est le seul diviseur commun de 40 et 63. C'est donc le plus grand.

- $40 = 2^3 \times 5$
- $63 = 3^2 \times 7$

→ Aucun facteur premier n'apparaît simultanément dans les deux décompositions. Le seul nombre qui divise 40 et 63 et donc 1.

- $63 = 40 \times 1 + 23$
- $40 = 23 \times 1 + 17$
- $23 = 17 \times 1 + 6$
- $17 = 6 \times 2 + 5$
- $6 = 5 \times 1 + 1$
- $5 = 1 \times 5 + 0$

→ Le dernier reste non nul est 1. On constate également au travers de cet exemple que l'algorithme d'Euclide n'est pas la méthode la plus rapide dans le cas de « petits » nombres.

6. Plus petit commun multiple

Le Plus Petit Commun Multiple (abrégé en ppcm) de deux nombres est, comme son nom l'indique, le plus petit nombre qui est simultanément multiple des deux nombres considérés.

6.1. Calcul du ppcm

Considérons deux nombres, par exemple 48 et 60 comme précédemment.

On peut dresser la liste des multiples de chacun des nombres jusqu'à trouver un multiple commun.

$48\times1=48$	$60\times1=60$
$48\times2=96$	$60\times2=120$
$48\times3=144$	$60\times3=180$
$48\times4=192$	$60\times4=240$
$48\times5=240$	

On constate que 240 est le plus petit nombre qui est à la fois multiple de 48 et 60. On le note ppcm(48, 60) ou $48\vee60$.

On peut également décomposer ces deux nombres en facteurs premiers : $48=2^4\times3$ et $60=2^2\times3\times5$

On en déduit la décomposition en facteurs premiers du ppcm, obtenue en considérant tous les facteurs premiers et en conservant la plus grande puissance de chacun d'entre eux. Dans notre, cas, les facteurs qui apparaissent dans l'une ou l'autre des deux décompositions sont 2, 3 et 5. 2 est élevé à la puissance 4 dans la décomposition de 48 et à la puissance 2 dans celle de 60, sa plus grande puissance est donc 4. De même, la plus grande puissance pour 3 comme pour 5 est 1.

La décomposition du ppcm est donc : $2^4\times3\times5=16\times3\times5=240$.

On retrouve bien : ppcm(48, 60) $= 48\vee60=240$.

6.2. Lien entre pgcd et ppcm

Le pgcd et le ppcm vérifient une propriété qui établit un lien entre eux. Si on considère le pgcd et le ppcm de deux nombres, leur produit est en effet égal au produit des deux nombres. En d'autres termes, si a et b sont deux nombres entiers naturels :

$$a\times b=\text{pgcd}(a, b)\times\text{ppcm}(a, b)$$

Dans l'exemple utilisé précédent, on a ainsi :

- $48 \times 60 = 2\,880$
- $\text{pgcd}(48, 60) \times \text{ppcm}(48, 60) = 12 \times 240 = 2\,880$

Cette propriété se démontre aisément en considérant les décompositions en facteurs premiers des deux nombres a et b auxquels on s'intéresse. Elle nécessite quelques connaissances complémentaires concernant le calcul de puissances, que nous verrons au chapitre 3.

Grâce à cette propriété, on peut calculer pgcd(a, b) en fonction de ppcm(a, b) et vice-versa. En effet, leur produit étant égal à $a \times b$, chacun est le quotient de $a \times b$ par l'autre.

- $\text{pgcd}(a, b) = a \times b \div \text{ppcm}(a, b)$
- et $\text{ppcm}(a, b) = a \times b \div \text{pgcd}(a, b)$

Dernière remarque Dans le cas de deux nombres premiers entre eux, on obtient que leur produit est égal à leur ppcm. En effet, si a et b sont premiers entre eux, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et l'égalité précédente devient $a \times b = 1 \times \text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(a, b)$.

Ainsi, le ppcm de 60 et 43 dont on a vu précédemment qu'ils étaient premiers entre eux est $60 \times 43 = 2\,580$.

Pour aller plus loin

Bien que remontant à l'antiquité, l'arithmétique est un domaine toujours très actif des mathématiques. En particulier, le système d'encryption RSA, en vigueur pour sécuriser les échanges d'information sur le réseau Internet, utilise des calculs liés aux nombres premiers. Un certain nombre d'éléments d'arithmétique sont décrits dans les livres de lycée. Des résultats complémentaires seront trouvés dans des ouvrages spécialisés. Un cadre plus général, qui modélise les notions d'arithmétique (diviseur, multiple, nombre premier...) pour des éléments mathématiques autres que des nombres, est développé dans des livres d'algèbre de l'enseignement supérieur en particulier *via* les notions d'anneau principal, d'anneau euclidien et d'anneau factoriel.

Chapitre 3

Calcul numérique

1. Mener un calcul

Il n'y a pas une manière unique de mener un calcul. Un certain nombre de règles existent qu'il convient de respecter. Mais chacun est libre de choisir de calculer de la façon qui lui paraît la plus efficace ou la plus confortable. L'important est de comprendre ce que l'on fait, d'aller à son rythme et d'obtenir le bon résultat. Aller à son rythme est un point particulièrement important car beaucoup d'erreurs de calcul sont dues à une trop grande précipitation et à un manque de concentration. Or il est très difficile de détecter à la relecture ses propres erreurs de calcul. Mieux vaut donc prendre son temps et trouver le bon résultat du premier coup.

1.1. Priorités entre opérations

Les opérations ne sont pas toutes sur un pied d'égalité. Lorsqu'une expression comporte plusieurs opérations, la multiplication et la division ont en effet priorité sur l'addition et la soustraction.

Ainsi, le calcul $5+3\times2$ doit s'effectuer de la manière suivante :

$$5+3\times2=5+6=11$$

On effectue la multiplication puis l'addition dans un deuxième temps. En effet, on est en présence de 5 unités que l'on ajoute à « 3 paquets de 2 », c'est-à-dire 6 unités.

Remarque Le calcul qui n'appliquerait pas cette règle consisterait à effectuer d'abord l'addition $5+3=8$ puis la multiplication par 2, ce qui donnerait comme résultat $8\times2=16$, correspondant à « 2 paquets de 8 », calcul différent de celui proposé.

À noter que le calcul $3\times2+5$ donne le même résultat :

$$3\times2+5=6+5=11$$

Là encore, on effectue la multiplication puis l'addition, indépendamment de l'ordre dans lequel apparaissent les opérations.

Lorsque l'on n'a plus que des opérations de « même priorité », on doit effectuer les calculs de gauche à droite. Ainsi l'expression $A=4\times2-6\div2+4$ se calcule de la manière suivante :

$$A=4\times2-6\div2+4=8-3+4=5+4=9$$

On effectue prioritairement la multiplication et la division, puis les opérations restantes, soustraction et addition, de gauche à droite.

1.2. Parenthèses

Les parenthèses permettent de modifier l'ordre dans lequel s'effectuent les calculs. Les calculs situés entre parenthèses ont en effet priorité. À l'intérieur d'une parenthèse, les règles précédentes s'appliquent.

Exemple

- $(5+2)\times3=7\times3=21$: on effectue d'abord l'addition car elle est située à l'intérieur de la parenthèse.
- $10\div(8-2\times3)=10\div(8-6)=10\div2=5$: on se préoccupe d'abord de la parenthèse et à l'intérieur de celle-ci, la multiplication est prioritaire sur l'addition.

À titre d'illustration, voici un calcul du début de collège.

Imaginons que 3 groupes de 10, 18 et 22 enfants accompagnés respectivement par 2, 2 et 3 adultes se rendent à un spectacle dont le prix d'entrée est de 10 euros par adulte et 5 euros par enfant. Le prix d'entrée total correspond en euros au calcul global suivant :

$$P=\Big(\underbrace{2+2+3}_{\text{nombre d'adultes}}\Big)\times\underbrace{10}_{\text{prix adulte}}+\Big(\underbrace{10+18+22}_{\text{nombre d'enfants}}\Big)\times\underbrace{5}_{\text{Prix enfant}}$$

Les parenthèses permettent de modifier la priorité des opérations en effectuant d'abord les additions.

On obtient donc en traitant les parenthèses :

$P=(4+3)\times10+(28+22)\times5=7\times10+50\times5.$

On termine alors le calcul en appliquant les règles de priorité entre opérations : $P=70+250=320.$

À noter que des parenthèses peuvent se trouver à l'intérieur d'une parenthèse. On effectue prioritairement les calculs de la parenthèse située « à l'intérieur ». Par exemple : $3\times\left(10-(8-3)\right)=3\times(10-5)=3\times5=15.$

1.3. Vocabulaire

- Le résultat d'une addition s'appelle une *somme*.

  Le calcul « $3+2$ » se lit « la somme de 3 et 2 ».
- Le résultat d'une soustraction s'appelle une *différence*.

  Le calcul « $3-2$ » se lit « la différence de 3 et 2 ».
- Le résultat d'une multiplication s'appelle un *produit*.

  Le calcul « 3×2 » se lit « le produit de 3 par 2 ».
- Le résultat d'une division s'appelle un *quotient*.

  Le calcul « $3\div2$ » se lit « le quotient de 3 par 2 ».

On notera que pour la somme et la différence, on utilise « et » et pour le produit et le quotient « par » entre les différents termes.

Vocabulaire complémentaire

Dans le cas d'un produit, les termes apparaissant dans l'expression s'appellent des facteurs (3 et 2 sont les facteurs du produit 3×2).

Lorsqu'une expression comporte plusieurs opérations, le nom de l'expression globale est donné par la dernière opération effectuée, en tenant compte des priorités de calcul.

Ainsi $A=3\times2+10\div2$ se lit : « A est la somme du produit de 3 par 2 et du quotient de 10 par 2 ». La multiplication et la division ayant priorité sur l'addition, l'expression globale A est une somme puisque l'addition sera effectuée en dernier. Les termes intervenant dans la somme sont un produit et un quotient.

De même, $B=3\times(2+10\div2)$ se lit « B est le produit de 3 par la somme de 2 et du quotient de 10 par 2 ». Le fait d'avoir ajouté des parenthèses a modifié l'ordre des opérations. L'expression B est un produit car la dernière opération réalisée est désormais la multiplication. Les facteurs du produit sont 3 et l'expression entre parenthèses.

1.4. Commutativité et associativité

Dans le cas de la multiplication et de l'addition, on peut s'affranchir de la règle « de gauche à droite » afin de simplifier les calculs.

Premièrement, l'ordre des termes n'intervient pas.
En effet :
$3\times2=2\times3=6$.
$3+2=2+3=5$.

Il peut donc être intéressant dans un calcul de changer l'ordre des termes, plutôt que de respecter la règle de gauche à droite.

Illustration $4{,}95+6{,}123+0{,}05=4{,}95+0{,}05+6{,}123=5+6{,}123=11{,}123$

On a interverti les deux derniers termes car $4{,}95+0{,}05$ est un calcul plus simple à effectuer que $4{,}95+6{,}123$.

En synthèse, si a et b sont deux nombres quelconques, on a :

$$a+b=b+a$$

$$a\times b=b\times a$$

Cette propriété est la commutativité. L'addition et la multiplication sont des opérations commutatives. À noter que la soustraction et la division ne sont pas des opérations commutatives.

Deuxièmement, il peut être utile, tout en conservant l'ordre des termes, de ne pas effectuer les opérations de gauche à droite.

Illustration $6{,}123+4{,}95+0{,}05=6{,}123+5=11{,}123$.

Pour simplifier le calcul, on a d'abord effectué la deuxième addition. De manière plus complète, on a les égalités suivantes :

$6{,}123+4{,}95+0{,}05=\left(6{,}123+4{,}95\right)+0{,}05=6{,}123+\left(4{,}95+0{,}05\right)$

La 1re expression traduit le calcul à effectuer, la 2e exprime, grâce à des parenthèses, la règle de priorité des calculs « de gauche à droite », la 3e traduit par des parenthèses le fait que l'on peut grouper les termes de manière différente sans affecter le résultat.

En synthèse, si a, b et c sont trois nombres quelconques, on a :

$$a+b+c=\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)$$

$$a\times b\times c=\left(a\times b\right)\times c=a\times\left(b\times c\right)$$

Cette propriété est l'associativité. L'addition et la multiplication sont des opérations associatives. À noter que la soustraction et la division ne sont pas des opérations associatives.

1.5. Distributivité

Les priorités exposées précédemment permettent d'effectuer n'importe quel calcul. Cependant il peut être efficace d'observer un calcul sous un angle différent afin de le rendre plus simple.

Considérons par exemple le calcul 5×99. Effectuer ce calcul de tête n'est pas particulièrement facile. On peut alors considérer que multiplier 5 par 99 revient à multiplier 5 par 100 puis à retirer le 5 que l'on a compté une fois de trop. Le calcul devient alors beaucoup plus simple car multiplier par 100 est facile :
$5\times 99=5\times 100-5=500-5=495$

La formalisation mathématique de cette manière de procéder est la suivante :

$$5\times 99=\underbrace{5\times(100-1)=5\times 100}_{1^{re}\text{ étape}}\underbrace{-5\times 1=500}_{2^{e}\text{ étape}}\underbrace{-5=495}_{3^{e}\text{ étape}}$$

- Dans la 1re étape, on exprime simplement que $99=100-1$, ce qui permet de faire apparaître, grâce à l'utilisation des parenthèses, les termes qui vont simplifier le calcul.
- Dans la 2e étape, on n'applique pas la priorité de calcul de la parenthèse (ce qui nous ramènerait à 5×99, calcul que l'on ne souhaite pas effectuer) mais on « casse » le calcul en deux opérations séparées. Cette propriété, qui permet de faire disparaître les parenthèses, s'appelle la distributivité. On a transformé un produit en une différence, en multipliant séparément par les différents termes contenus entre parenthèses.
- La 3e étape termine le calcul en appliquant les priorités entre opérations énoncées précédemment.

De manière plus générale, si on considère trois nombres quelconques que l'on nomme *a*, *b* et *k*, on dispose des égalités de calcul suivantes :

$$k\times\left(a+b\right)=k\times a+k\times b$$

$$k\times\left(a-b\right)=k\times a-k\times b$$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.

Dans l'exemple précédent, on avait $k=5$, $a=99$, $b=1$ et en utilisant la 2e égalité ci-dessus $5\times\left(100-1\right)=5\times 100-5\times 1$.

De même, le calcul $4{,}5\times 9{,}8+4{,}5\times 0{,}2$ peut sembler rébarbatif. En utilisant la 1re égalité ci-dessus (lue de droite à gauche),

avec : $k=4{,}5$, $a=9{,}8$, $b=0{,}2$,

on a : $4{,}5\times 9{,}8+4{,}5\times 0{,}2=4{,}5\times\left(9{,}8+0{,}2\right)$.

Le calcul devient donc $4{,}5\times\left(9{,}8+0{,}2\right)=4{,}5\times 10=45$.

Remarque En appliquant la propriété de commutativité de la multiplication, les égalités précédentes s'écrivent :

$$(a+b)\times k = a\times k + b\times k$$

$$(a-b)\times k = a\times k - b\times k$$

Vocabulaire complémentaire

Si l'on considère les quatre égalités ci-dessus de gauche à droite (c'est-à-dire en faisant disparaître les parenthèses), on constate que l'on transforme un produit en une somme ou une différence. On dit que l'on *développe* l'expression, où que l'on effectue un développement.

Si l'on considère les quatre égalités ci-dessus de droite à gauche (c'est-à-dire en faisant apparaître les parenthèses), on constate que l'on transforme une somme ou une différence en un produit. On dit que l'on factorise l'expression, où que l'on effectue une factorisation.

Nous reviendrons sur la distributivité et ses applications (développement et factorisation) dans le chapitre consacré au calcul littéral.

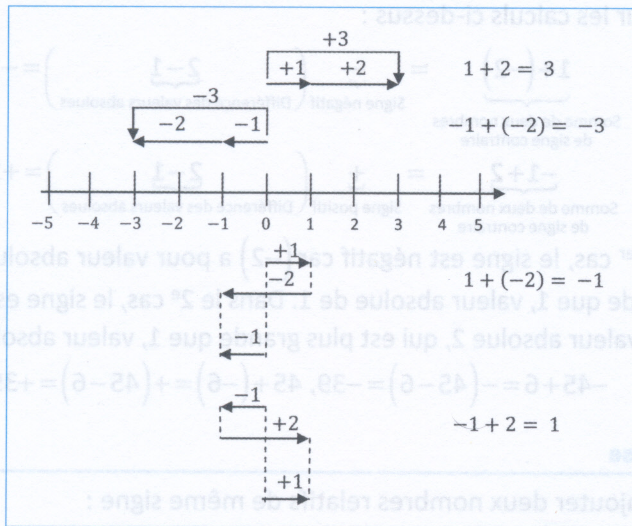
Pour aller plus loin

Les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité sont fondamentales en algèbre. Elles permettent en particulier de définir les structures de groupe et d'anneau. Le lecteur pourra trouver des compléments sur le sujet dans des livres d'algèbre du supérieur.

2. Calculer avec des…

2.1. Nombres positifs et négatifs

Nous considérons l'addition de nombres positifs comme acquise. Il nous reste à additionner un nombre positif et un nombre négatif ainsi qu'à additionner deux nombres négatifs. Le calcul avec des nombres négatifs paraît simple et intuitif à certains, abstrait et abscons à d'autres. On peut s'aider d'une règle graduée pour visualiser le mécanisme. On considère qu'additionner un nombre positif revient à « avancer », c'est-à-dire à se déplacer dans le sens de graduation et qu'additionner un nombre négatif revient à « reculer », c'est-à-dire se déplacer dans le sens contraire.



On obtient ainsi :

$1+2=3 \qquad -1+\left(-2\right)=-3 \qquad 1+\left(-2\right)=-1 \qquad -1+2=1$

> **Remarque** En terme d'écriture, on note, comme on l'a vu au 1[er] chapitre, que le signe « + » est facultatif et peut être omis devant un nombre positif. D'autre part, deux signes ne peuvent être accolés et il est donc nécessaire d'utiliser des parenthèses pour les séparer.

La formalisation mathématique des schémas ci-dessus peut être faite de la manière suivante :

- Pour additionner deux nombres négatifs, on additionne leur distance à zéro (ou valeur absolue) et on indique un signe « – » devant car on sait que le résultat est un nombre négatif (puisque l'on a « reculé » deux fois). En d'autres termes, pour le calcul ci-dessus :

$$\underbrace{-1+\left(-2\right)}_{\text{Somme de deux nombres négatifs}} = \underbrace{-}_{\text{Signe du résultat}} \underbrace{\left(1+2\right)}_{\text{Somme des valeurs absolues}} = -3$$

Exemple $-45+\left(-6{,}23\right)=-\left(45+6{,}23\right)=-51{,}23$

- Pour additionner un nombre positif et un nombre négatif, il faut d'abord déterminer le signe du résultat. En d'autres termes, a-t-on globalement reculé ou avancé ? On constate que le nombre qui a la plus grande valeur absolue donne son signe au résultat. En effet, il entraîne un déplacement plus important « de son côté ». Une fois déterminé le signe, on effectue la différence des deux valeurs absolues, en soustrayant la plus petite à la plus grande. En effet, le déplacement global est la différence des deux déplacements, l'un ayant « compensé » l'autre.

Ainsi, pour les calculs ci-dessus :

$$\underbrace{1+(-2)}_{\text{Somme de deux nombres de signe contraire}} = \underbrace{-}_{\text{Signe négatif}}\Big(\underbrace{2-1}_{\text{Différence des valeurs absolues}}\Big) = -1$$

$$\underbrace{-1+2}_{\text{Somme de deux nombres de signe contraire}} = \underbrace{+}_{\text{Signe positif}}\Big(\underbrace{2-1}_{\text{Différence des valeurs absolues}}\Big) = +1$$

Dans le 1[er] cas, le signe est négatif car (-2) a pour valeur absolue 2, qui est plus grande que 1, valeur absolue de 1. Dans le 2[e] cas, le signe est positif car 2 a pour valeur absolue 2, qui est plus grande que 1, valeur absolue de (-1).

Exemples $-45+6=-(45-6)=-39$, $45+(-6)=+(45-6)=+39=39$

En synthèse

- Pour ajouter deux nombres relatifs de même signe :
  - On garde leur signe
  - On ajoute leurs valeurs absolues
- Pour ajouter deux nombres relatifs de signes contraires :
  - On garde le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue
  - On soustrait leurs valeurs absolues

Une fois assimilée l'addition de nombres relatifs, il est facile d'effectuer la soustraction. En effet, on ramène la soustraction à une addition, en définissant la soustraction d'un nombre comme l'addition de son opposé. Ainsi, soustraire 3 revient à additionner –3 et soustraire –3 revient à additionner $-(-3)$, c'est-à-dire 3.

Exemple

$$\underbrace{-45-(-4)}_{\text{Soustraction de }-4} = \underbrace{-45+4}_{\text{Addition de l'opposé : 4}} = \underbrace{-(45-4)=-41}_{\text{Méthode d'addition précédente}}$$

$$\underbrace{-45-4}_{\text{Soustraction de 4}} = \underbrace{-45+(-4)}_{\text{Addition de l'opposé : }-4} = \underbrace{-(45+4)=-49}_{\text{Méthode d'addition précédente}}$$

$$\underbrace{45-(-4)}_{\text{Soustraction de }-4} = \underbrace{45+4}_{\text{Addition de l'opposé 4}} = 49$$

Une des conséquences de savoir additionner et soustraire des nombres, quel que soit leur signe, est de comprendre la règle qui permet de s'affranchir des parenthèses. Comme on l'a vu précédemment, les parenthèses permettent de changer la priorité des calculs en indiquant que le calcul entre parenthèses doit être effectué en premier lieu. Néanmoins, dans certains cas et en particulier en calcul littéral que nous verrons plus loin dans ce livre, il peut s'avérer utile, sinon nécessaire, de se défaire des parenthèses.

Considérons le calcul suivant : $1{,}25+\left(5-1{,}25\right)$. En respectant la priorité des parenthèses, on écrit : $1{,}25+\left(5-1{,}25\right)=1{,}25+3{,}75=5$. En fait les parenthèses n'apportent rien ici. Si on les enlève, on obtient :
$1{,}25+5-1{,}25=6{,}25-1{,}25=5$, soit le même résultat.

Cela provient du fait que lorsque l'on additionne un calcul entre parenthèses, on se ramène en fait à une série d'addition (puisqu'une soustraction peut toujours se ramener à une addition comme on l'a vu précédemment). L'addition étant associative, l'ordre dans lequel on effectue les calculs n'intervient pas et le résultat est le même, avec ou sans parenthèses.

La situation change lorsque l'on considère le calcul : $1{,}25-(5-1{,}25)$.
Effectué en respectant la priorité des parenthèses, on obtient :

$1{,}25-\left(5-1{,}25\right)=1{,}25-\left(3{,}75\right)=-\left(3{,}75-1{,}25\right)=-2{,}5$.

Si on enlève les parenthèses sans précaution, on a :
$1{,}25-5-1{,}25=1{,}25+\left(-5\right)+\left(-1{,}25\right)=1{,}25+\left(-1{,}25\right)-5=-5$, soit un résultat différent, et donc faux pour le calcul initial avec parenthèses.

Cela provient du fait que soustraire un calcul entre parenthèses revient à additionner son opposé. On ne peut plus alors « retirer » les parenthèses sans précaution. En effet l'opposé d'un nombre étant de signe contraire, retirer les parenthèses revient en fait à inverser tous les signes contenus dans la parenthèse.

Ainsi : $1{,}25-\underbrace{\left(5-1{,}25\right)}_{\text{Soustraction de la parenthèse}}=1{,}25+\underbrace{\left(-\left(5-1{,}25\right)\right)}_{\text{Addition de l'opposé}}=1{,}25+\underbrace{\left(-5+1{,}25\right)}_{\text{Changement de signe : 5 devient }-5\text{, }-1{,}25\text{ devient }+1{,}25}$.

On peut alors retirer les parenthèses précédées d'un signe « + » et on obtient :

$1{,}25-\left(5-1{,}25\right)=1{,}25-5+1{,}25=-2{,}5$.

De manière générale, lorsque l'on calcule une somme algébrique, c'est-à-dire une suite d'additions et de soustractions on peut retirer les parenthèses en veillant à la règle suivante :

> Les parenthèses précédées d'un signe « + » peuvent être retirées sans précaution particulière.
> Les parenthèses précédées d'un signe « − » peuvent être retirées en veillant à inverser tous les signes des termes contenus à l'intérieur des parenthèses.

Ainsi, calculer : $-\left(5-4+2\right)+\left(5-4+2\right)-\left(-5-4+2\right)+\left(-5-4+2\right)$
revient à calculer : $-5+4-2+5-4+2+5+4-2-5-4+2$.

Ces deux calculs donnent un résultat nul.

Il nous reste encore à multiplier et diviser des nombres relatifs.

- On sait multiplier deux nombres positifs.

  Exemple $3\times 3{,}2=3{,}2+3{,}2+3{,}2=9{,}6$.

- Multiplier un nombre négatif par un nombre positif va donner un résultat négatif, puisque l'on peut considérer que l'on additionne un certain nombre de fois un nombre négatif.

  $3\times(-3{,}2)=-3{,}2+(-3{,}2)+(-3{,}2)=-6{,}4+(-3{,}2)=-9{,}6$.

  On notera que là encore, on utilise la parenthèse avec la multiplication afin d'éviter que deux signes ne soient accolés.

- Multiplier un nombre positif par un nombre négatif revient donc à multiplier les valeurs absolues de ces nombres, c'est-à-dire à effectuer une opération entre nombres positifs, puis à prendre l'opposé du résultat obtenu en ajoutant le signe « – ».

  Exemple $4{,}23\times(-6)=-(4{,}23\times 6)=-25{,}38$

- Nous devons maintenant multiplier un nombre négatif par un nombre négatif. Intuitivement, on peut considérer que le fait de multiplier par un nombre négatif fait « partir dans l'autre sens » et donc que $(-3)\times(-3{,}2)$ donne un résultat opposé à $3\times(-3{,}2)$, c'est-à-dire positif :

  $$\underbrace{-3\times(-3{,}2)}_{\text{Multiplication par }-3} = \underbrace{\underbrace{-}_{\textit{Signe opposé}}\big(3\times(-3{,}2)\big)}_{\text{« Change le sens » par rapport à une multiplication par 3}} = \underbrace{-(-9{,}6)}_{\text{Opposé de }-9{,}6} = 9{,}6$$

  Multiplier un nombre négatif par un nombre négatif revient donc à multiplier les valeurs absolues de ces nombres, c'est-à-dire à effectuer une opération entre nombres positifs.

  Exemple $-4{,}23\times(-6)=4{,}23\times 6=25{,}38$.

- Un raisonnement sur la division amène à un résultat similaire.

  Ainsi : $15\div 3=5$ $\quad 15\div(-3)=-5$ $\quad -15\div 3=-5$ $\quad -15\div(-3)=5$

En synthèse

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.
- Le quotient de deux nombres de même signe est positif.
- Le quotient de deux nombres de signes opposés est négatif.

Remarque importante Le produit d'un nombre par –1 est l'opposé de ce nombre. Par exemple : $3\times(-1)=-3$ et $(-3)\times(-1)=3=-(-3)$.

2.2. Fractions

Le calcul avec des fractions, enseigné au collège, pose en général des problèmes aux élèves concernés. Or les fractions sont des nombres « comme les autres ». Le problème vient en fait souvent du manque de compréhension de ce que représente une fraction.

Comme nous l'avons vu au 1er chapitre, une fraction est le quotient d'un entier par un autre entier.
Elle se compose d'un dénominateur (qui nomme) et d'un numérateur (qui numérote) :

$$\text{Fraction} = \frac{\text{Numérateur}}{\text{Dénominateur}}$$

Exemple Considérons alors $\frac{5}{7}$ qui se lit « cinq septièmes » et qui signifie que l'on compte cinq septièmes. Par définition de la multiplication, compter cinq septièmes revient à multiplier un septième par 5.
On obtient ainsi $\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 5 \times \frac{1}{7}$.

De même, pour toute fraction $\frac{a}{b}$, on a :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Note importante On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : diviser par un nombre quelconque b revient à multiplier par la fraction $\frac{1}{b}$. Ainsi, diviser par 43 revient à multiplier par $\frac{1}{43}$.

D'après l'égalité ci-dessus, si l'on veut multiplier $\frac{5}{7}$ par un nombre quelconque, par exemple 32, il suffit alors d'écrire :

$$32 \times \frac{5}{7} = 32 \times \underbrace{5 \times \frac{1}{7}}_{\text{Propriété ci-dessus}} = \underbrace{(32 \times 5)}_{\text{Associativité de la multiplication}} \times \frac{1}{7} = \underbrace{\frac{32 \times 5}{7}}_{\text{Propriété ci-dessus}} = \frac{160}{7}$$

Ainsi, pour toute fraction $\frac{a}{b}$ et pour tout nombre c, on a :

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{b}$$

Calculons à présent le produit de deux fractions :

Exemple $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}$.

Par définition d'une fraction, $\frac{1}{7}$ est le quotient de 1 par 7 et on a donc $7\times\frac{1}{7}=1$.

De même, $2\times\frac{1}{2}=1$.

On obtient donc, en multipliant les premiers termes des deux égalités :

$$\left(7\times\frac{1}{7}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\right)=1\times1=1.\quad (i)$$

En tenant compte de la commutativité et de l'associativité de la multiplication, on peut également calculer $\left(7\times\frac{1}{7}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\right)$ de la manière suivante :

$$\left(7\times\frac{1}{7}\right)\times\left(2\times\frac{1}{2}\right)=7\times\frac{1}{7}\times2\times\frac{1}{2}=7\times2\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=(7\times2)\times\left(\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\right).\quad (ii)$$

En comparant les deux calculs (*i* et *ii*), on peut alors écrire :

$$1=(7\times2)\times\left(\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\right).$$

Cette égalité traduit le fait que $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}$ est le quotient de 1 par (7×2).

Mais on sait par ailleurs que, par définition d'une fraction, le quotient de 1 par (7×2) est $\frac{1}{(7\times2)}$.

On déduit de ce qui précède que $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{7\times2}$ sont tous deux le quotient de 1 par (7×2). Ces deux nombres sont donc égaux : $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{7\times2}=\frac{1}{14}$.

De manière plus générale, si a et b sont deux entiers non nuls,

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a\times b}$$

Note importante On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : diviser par un nombre quelconque a puis par un nombre quelconque b revient à diviser par leur produit. Ainsi, diviser par 6 puis par 7 revient à diviser par $6\times7=42$. On peut vérifier par exemple d'une part que $210\div6=35$ et $35\div7=5$ et que d'autre part $210\div42=5$.

Les égalités précédentes combinées entre elles, permettent d'écrire, que pour toutes fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple $\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 3}{5\times 7}=\frac{6}{35}$

Appliquons maintenant la formule précédente au calcul $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$.

On obtient $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{2\times 5}{5\times 2}=\frac{10}{10}=1$.

Par définition de la division, cela signifie que $\frac{5}{2}$ est le résultat de la division de 1 par $\frac{2}{5}$.

En d'autres termes : $1\div\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{2}$.

En utilisant l'écriture fractionnaire, on a : $\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$.

De façon plus générale, pour toute fraction $\frac{a}{b}$, on a :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$$

La combinaison des deux dernières formules encadrées permet alors de déduire que pour toutes fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Exemple $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{2\times 7}{5\times 3}=\frac{14}{15}$

Un point important concernant le calcul de fraction est le fait qu'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre sans changer la valeur de la fraction.

Exemple $\frac{7}{4}=\frac{7\times3}{4\times3}$.

En effet : $\frac{7}{4}=\frac{7}{4}\times1=\frac{7}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{7\times3}{4\times3}=\frac{21}{12}$.

On a utilisé la formule de multiplication des fractions en remarquant au préalable que $1=\frac{3}{3}$.

De manière analogue, on peut diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre sans changer la valeur de la fraction.

Exemple $\frac{7}{4}=\frac{7\div3}{4\div3}$.

En effet, on peut écrire $\frac{7}{4}=\frac{7}{4}\times1=\frac{7}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{7\times3}{4\times3}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{7\div3}{4\div3}$

en utilisant la formule de division des fractions.

Ainsi, pour toute fraction $\frac{a}{b}$ et pour tout nombre c différent de zéro, on a :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}$$

Cette dernière formule permet de simplifier les fractions et doit être présente à l'esprit aussi bien en début de calcul qu'à la fin du processus. Ainsi, le calcul suivant qui peut paraître compliqué se ramène à des opérations assez simples, en simplifiant les fractions au début puis le résultat à la fin.

$$\frac{56}{21}\times\frac{30}{25}=\frac{56\div7}{21\div7}\times\frac{30\div5}{25\div5}=\frac{8}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{8\times6}{3\times5}=\frac{48}{15}=\frac{48\div3}{15\div3}=\frac{16}{5}$$

De manière pratique, on peut décomposer en produit les nombres considérés et « supprimer » les facteurs apparaissant au numérateur et au dénominateur.

Ainsi plutôt que d'écrire $\frac{56}{21}=\frac{56\div7}{21\div7}=\frac{8}{3}$, on écrira : $\frac{56}{21}=\frac{8\times\boxed{7}}{3\times\boxed{7}}=\frac{8}{3}$.

On a identifié le chiffre 7 comme facteur apparaissant dans la décomposition en produit de 56 et 21 et on le « supprime en haut et en bas » car « supprimer » le facteur 7 traduit algébriquement le fait que l'on divise le numérateur et le dénominateur par 7.

Le calcul précédent s'écrira alors :

$$\frac{56}{21}\times\frac{30}{25}=\frac{56\times30}{21\times25}=\frac{8\times7\times6\times5}{3\times7\times5\times5}=\frac{8\times6}{3\times5}=\frac{8\times3\times2}{3\times5}=\frac{8\times2}{5}=\frac{16}{5}$$

Cette manière de faire est en particulier utile pour simplifier les fractions lorsque l'on travaille avec les décompositions en facteurs premiers (voir chapitre 2).

Par exemple : $\frac{60}{105}=\frac{2^2\times3\times5}{3\times5\times7}=\frac{2^2}{7}=\frac{4}{7}$.

Dans ce dernier exemple, on ne peut plus simplifier la fraction, car 4 et 7 n'ont pas de diviseur commun autre que 1. Ils sont premiers entre eux (voir chapitre 2). De manière générale, toute opération de simplification de fraction s'arrête lorsque le numérateur et le dénominateur sont des nombres premiers entre eux. On dit alors que la fraction est irréductible. Elle ne peut plus être réduite.

En pratique, afin de déterminer la forme irréductible d'une fraction, on peut déterminer le pgcd du numérateur et du dénominateur (voir chapitre 2). Le pgcd est en effet le plus grand entier qui divise simultanément les deux nombres. Une fois que l'on a divisé le numérateur et le dénominateur par leur pgcd, on ne peut plus simplifier la fraction et l'on obtient donc sa forme irréductible.

Par exemple, on a calculé au chapitre 2 le pgcd de 48 et de 60, égal à 12.

On a donc : $\frac{48}{60}=\frac{48\div12}{60\div12}=\frac{4}{5}$. Autrement dit, $\frac{4}{5}$ est la forme irréductible de $\frac{48}{60}$.

Il nous reste à présent à additionner et soustraire des fractions.

Considérons par exemple $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{5}$. Il nous faut additionner des « septièmes » et des « cinquièmes ». De la même manière que l'on ne peut pas additionner des pommes et des poires, le calcul $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$ ne peut pas donner directement un résultat. Il nous faut transformer les fractions pour les mettre au même dénominateur, afin qu'elles aient le « même nom », désignent le même objet et puissent donc être additionnées de manière classique.

La propriété de multiplication nous permet d'écrire :

$\frac{2}{7}=\frac{2\times5}{7\times5}=\frac{10}{35}$ et $\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35}$.

Additionner les deux fractions revient donc à additionner des « trente-cinquièmes », 10 pour $\frac{2}{7}$ et 21 en ce qui concerne $\frac{3}{5}$. Au total, on a $10+21=31$ trente-cinquièmes et $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}$.

Algébriquement parlant, on remarque que l'on a en fait utilisé la distributivité de la multiplication.

En effet :

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}=10\times\frac{1}{35}+21\times\frac{1}{35}=(10+21)\times\frac{1}{35}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}$$

Pour la soustraction, on procède exactement de la même façon :

$$\frac{2}{7}-\frac{3}{5}=\frac{10}{35}-\frac{21}{35}=10\times\frac{1}{35}-21\times\frac{1}{35}=(10-21)\times\frac{1}{35}=\frac{10-21}{35}=\frac{-11}{35}$$

Additionner ou soustraire des fractions consiste donc en fait à les écrire avec le même dénominateur, puis à additionner ou soustraire les numérateurs.

Trouver le même dénominateur, que l'on appelle dénominateur commun, consiste à trouver un nombre qui est dans la table de multiplication des deux dénominateurs concernés. Ainsi, dans l'exemple précédent, on a multiplié 7 par 5 puis 5 par 7 pour obtenir dans les deux cas des trente-cinquièmes, 35 étant à la fois un multiple de 7 et de 5.

Dans le cas général, en multipliant les deux dénominateurs entre eux, on obtient évidemment un multiple commun. Ainsi $\frac{1}{48}+\frac{1}{60}$ peut se calculer de la manière suivante :

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{60}=\frac{1\times60}{48\times60}+\frac{1\times48}{60\times48}=\frac{60}{2\,880}+\frac{48}{2\,880}=\frac{60+48}{2\,880}=\frac{108}{2\,880}.$$

Mais on peut aussi utiliser le ppcm (voir chapitre 2). Le ppcm des deux dénominateurs est en effet un multiple des deux nombres. On va donc pouvoir écrire les deux fractions sous forme de « ppcm-ième », c'est-à-dire en utilisant le ppcm comme dénominateur commun.

Au chapitre 2, on a établi que le ppcm de 48 et 60 est 240. On a donc, en utilisant 240 comme dénominateur commun :

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{60}=\frac{1\times5}{48\times5}+\frac{1\times4}{60\times4}=\frac{5}{240}+\frac{4}{240}=\frac{5+4}{240}=\frac{9}{240}.$$

L'intérêt d'utiliser le ppcm est que, celui-ci étant le plus petit des multiples communs, on travaille avec des nombres plus petits.

Remarque Le ppcm permet de déterminer le plus petit dénominateur commun afin d'effectuer l'addition ou la soustraction. Cela ne signifie pas pour autant que l'on obtient directement une fraction irréductible, c'est-à-dire non simplifiable, à la fin du calcul.

Dans notre exemple, $\frac{9}{240}$ n'est pas irréductible puisque $\frac{9}{240}=\frac{9\div 3}{240\div 3}=\frac{3}{80}$.

Au final on a donc : $\frac{1}{48}+\frac{1}{60}=\frac{3}{80}$

En effectuant le calcul en 2 880-ièmes, on aurait obtenu :

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{60}=\frac{108}{2\,880}=\frac{108\div 36}{2\,880\div 36}=\frac{3}{80}.$$

Dernière remarque concernant les fractions Lorsque l'on manipule des nombres négatifs, le signe « – » peut apparaître à différents endroits. À titre d'illustration, $\frac{-4}{3}$ représente le quotient de –4 par 3 tandis que $\frac{4}{-3}$ représente le quotient de 4 par –3. Comme on l'a vu dans les calculs de nombres négatifs, ces deux fractions sont des nombres négatifs dont la valeur absolue est $\frac{4}{3}$. Ils sont donc égaux et $\frac{-4}{3}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$. La dernière écriture, dans laquelle le signe « – » se trouve au niveau du trait de fraction indique le nombre négatif de valeur absolue $\frac{4}{3}$. Quant à $\frac{-4}{-3}$, cela traduit le quotient de –4 par –3. La règle de division de nombres négatifs donne $\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

2.3. Puissances

Quelques règles sont à connaître pour effectuer des calculs utilisant des puissances.

Si a est un nombre quelconque et m et n deux entiers naturels, on a :

$$a^m\times a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ fois}}\times\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{m+n\text{ fois}}$$

Ce qui s'écrit :

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

Illustration $5^2 \times 5^3 = 25 \times 125 = 3125$ et $5^{2+3} = 5^5 = 3125$.
Les deux calculs donnent bien le même résultat.

De même, $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ fois}} \times \ldots \times \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ fois}}}_{n \text{ fois}}$

C'est-à-dire $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \times n \text{ fois}}$

Ce qui s'écrit :

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

Illustration $\left(5^2\right)^3 = 25^3 = 15625$ et $5^{2\times3} = 5^6 = 15625$.
Les deux calculs donnent bien le même résultat.

Si l'on suppose en outre que a est non nul et que m est supérieur à n, on peut considérer le nombre $\frac{a^m}{a^n}$. Ce calcul consiste à multiplier m fois par a puis à diviser le produit obtenu n fois par a. Diviser par a revient à « retirer » une multiplication par a. Au final, on a « retiré » n multiplications et donc multiplié $m-n$ fois par a.

Ce qui s'écrit :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Illustration $\frac{5^5}{5^2} = \frac{3125}{25} = 125$ et $5^{5-2} = 5^3 = 125$.
Les deux calculs donnent bien le même résultat.

Considérons maintenant a et b deux nombres quelconques et m un entier naturel, on a :

$a^m \times b^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{m fois}} \times \underbrace{b \times b \times \ldots \times b}_{\text{m fois}}$

En utilisant la commutativité et l'associativité de la multiplication, on peut intervertir les nombres et regrouper chaque facteur a avec un facteur b. On obtient :

$$a^m \times b^m = \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \ldots \times (a \times b)}_{\text{m fois}}$$

Ce qui s'écrit :

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

Illustration $5^2 \times 3^2 = 25 \times 9 = 225$ et $(5 \times 3)^2 = 15^2 = 225$.
Les deux calculs donnent bien le même résultat.

Supposons en outre b non nul. On peut alors diviser par une puissance de b et déduire la formule suivante (en observant, comme vu dans les calculs de fractions, que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et en appliquant la formule précédente) :

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Illustration $\frac{10^3}{2^3} = \frac{1000}{8} = 125$ et $\left(\frac{10}{2}\right)^3 = 5^3 = 125$.
Les deux calculs donnent bien le même résultat.

On étend ensuite la notion de puissances à des exposants négatifs.

Si a est un nombre quelconque non nul et n est un entier naturel, on définit la puissance négative $-n$ par :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$.

On notera que zéro ne peut pas être élevé à une puissance négative, puisque la division par zéro n'existe pas.

Vocabulaire complémentaire

Pour un nombre quelconque a différent de zéro, le nombre $a^{-1} = \frac{1}{a}$ s'appelle l'inverse de a. Ainsi, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ est l'inverse de 3.

Toutes les formules précédentes deviennent alors également applicables pour des exposants négatifs et donc pour tout exposant qui est un entier relatif.

Ainsi :

$$3^4 \times 3^{-2} \times 3^{-5} = 3^{4+(-2)+(-5)} = 3^{2+(-5)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$5^{-5} \times 4^{-5} = (4 \times 5)^{-5} = 20^{-5} \qquad \left(5^{-2}\right)^{-3} = 5^{-2\times(-3)} = 5^6$$

$$\frac{7^{-2}}{5^{-2}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-2} \qquad \frac{4^{-3}}{4^4} = 4^{-3-4} = 4^{-7} \qquad 4^2 = \frac{1}{4^{-2}}$$

> **Remarque** Concernant le calcul de puissances avec des nombres négatifs :
> - Un nombre négatif élevé à un exposant pair donne un résultat positif.
> - Un nombre négatif élevé à un exposant impair donne un résultat négatif.

En effet, soit a un nombre négatif. Si l'exposant m est pair, m est un multiple de 2 et peut donc s'écrire sous la forme $m = 2 \times p$. On a alors : $a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{2\times p \text{ fois}}$.

C'est-à-dire, en groupant les facteurs a deux par deux, $a^m = \underbrace{(a \times a) \times \ldots \times (a \times a)}_{p \text{ fois}}$

Chaque facteur $(a \times a)$ est un nombre positif, en tant que produit de deux nombres négatifs. a^m est donc un nombre positif en tant que produit de p nombres positifs.

Dans le cas d'un exposant impair, m s'écrit $m = 2 \times p + 1$.

On obtient : $a^m = a^{2\times p+1} = a^{2\times p} \times a^1$(d'après les formules de calcul de puissances).

D'après ce qui précède, $a^{2\times p}$ est positif. D'autre part, $a^1 = a$ est un nombre négatif. Leur produit a^m est donc bien un nombre négatif.

Ainsi :

$(-5)^4 = +5^4 = 625$ 4 est un exposant pair. Le résultat est positif.

$(-5)^3 = -5^3 = -125$ 3 est un exposant impair. Le résultat est négatif.

> **Note** Il est important de noter la différence entre $(-5)^4$ et -5^4.
> Dans le premier cas, les parenthèses indiquent que le nombre négatif –5 est élevé à la puissance 4. Le résultat est donc positif.

Dans le deuxième cas, le signe « – » indique que l'on calcule l'opposé du nombre 5^4, c'est-à-dire l'opposé du nombre 5 élevé à la puissance 4. Il s'agit donc de l'opposé du nombre positif 5^4, c'est-à-dire d'un nombre négatif.

Ainsi $\left(-5\right)^4 = 625$, alors que $-5^4 = -625$.

Au sein du calcul de puissances, les puissances de 10 occupent une place privilégiée.
Remarquons tout d'abord que : $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$.

10^5 correspond à un « 1 » suivi de 5 zéros.

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001$. 10^{-5} correspond à un « 1 » en cinquième position après la virgule, précédé de zéros.

De manière générale :

- une puissance positive 10^p est un nombre qui correspond à « 1 » suivi de p zéros.
- une puissance négative 10^{-p} est un nombre qui correspond à « 1 » en p-ième position après la virgule, précédé de zéros.

On remarquera aussi que multiplier un nombre par une puissance de 10 consiste à « décaler » la virgule de son écriture décimale un nombre de fois égal à la valeur absolue de l'exposant, vers la droite s'il s'agit d'une puissance positive et vers la gauche s'il s'agit d'une puissance négative.

Exemple

$123{,}456 \times 10^2 = 12\,3456$	2 vers la droite
$123{,}456 \times 10^5 = 12\,345\,600{,}0 = 12\,345\,600$	5 vers la droite
$123{,}456 \times 10^{-2} = \frac{123{,}456}{10^2} = 1{,}23456$	2 vers la gauche
$123{,}456 \times 10^{-5} = \frac{123{,}456}{10^5} = 0{,}00123456$	5 vers la gauche

Une utilisation particulière des puissances de 10 est l'écriture scientifique d'un nombre. Cette écriture permet d'éviter beaucoup de « 0 », que ce soit pour les nombres « très grands », par exemple 204 500 000 000 ou « très petits », par exemple 0,000 000 0002 045. L'idée est d'écrire un nombre sous forme d'un produit de deux nombres, le 1er étant un nombre décimal compris entre 1 (supérieur ou égal) et 10 (strictement inférieur), le deuxième étant une puissance de 10 (l'exposant pouvant être négatif ou positif).

En d'autres termes, un nombre n s'écrit en écriture scientifique $n = a \times 10^p$, a étant un nombre décimal vérifiant $1 \leq a < 10$ et p étant un nombre entier relatif.

Exemple $204\,500\,000 = 2{,}045 \times 100\,000\,000 = 2{,}045 \times 10^8$.

$0{,}000002045 = \dfrac{2{,}045}{1\,000\,000} = \dfrac{2{,}045}{10^6} = 2{,}045 \times 10^{-6}$.

En pratique :

- on s'intéresse au 1[er] chiffre significatif (ici « 2 »)
- on détermine alors le nombre décimal a de l'écriture scientifique en faisant figurer tous les autres chiffres significatifs (ici « 0 », « 4 » et « 5 ») après la virgule (c'est-à-dire $a = 2{,}045$).
- on détermine enfin la puissance de 10 en observant le rang du 1er chiffre significatif par rapport à la virgule de l'écriture décimale initiale. Dans le 1[er] cas ci-dessus (204 500 000 que l'on pourrait écrire 204 500 000,0) il faut compter 8 chiffres à partir du 2 pour arriver au chiffre situé avant la virgule, donc $10^p = 10^8$. Dans le 2[e] cas (0,000 002 045) le 2 est le 6e chiffre après la virgule, donc $10^p = 10^{-6}$.

À titre d'illustration, les écritures scientifiques des quatre nombres calculés ci-dessus sont respectivement :

$12\,345{,}6 = 1{,}23456 \times 10^4$

$12\,345\,600 = 1{,}23456 \times 10^7$

$1{,}23456 = 1{,}23456 \times 10^0$

$0{,}00123456 = 1{,}23456 \times 10^{-3}$

Note Dans ce genre de calcul, il n'est pas nécessaire, ni même recommandé, de passer par l'écriture décimale pour aboutir à l'écriture scientifique. On utilise directement les calculs de puissances.

$123{,}456 \times 10^2 = 1{,}23456 \times 10^2 \times 10^2 = 1{,}23456 \times 10^4$.

$123{,}456 \times 10^5 = 1{,}23456 \times 10^2 \times 10^5 = 1{,}23456 \times 10^7$.

$123{,}456 \times 10^{-2} = 1{,}23456 \times 10^2 \times 10^{-2} = 1{,}23456 \times 10^0$.

$123{,}456 \times 10^{-5} = 1{,}23456 \times 10^2 \times 10^{-5} = 1{,}23456 \times 10^{-3}$.

Petit aparté « historique » : jusqu'à la fin des années soixante-dix et l'autorisation de la calculatrice au baccalauréat, les calculs se faisaient avec une « règle à calcul » qui imposait de travailler en écriture scientifique. Ainsi, pour calculer $3\,400 \times 0{,}078$, il fallait poser :

$3{,}4 \times 10^3 \times 7{,}8 \times 10^{-2} = 3{,}4 \times 7{,}8 \times 10^{3+(-2)} = 3{,}4 \times 7{,}8 \times 10^1$

La règle à calcul permettait en effet de calculer le produit (ou le quotient) de deux nombres compris entre 1 et 10, ici 3,4 et 7,8. Elle indiquait les chiffres significatifs du résultat 2,652 à charge à l'utilisateur de comprendre en évaluant les ordres de grandeur, qu'il s'agissait de :

$3{,}4 \times 7{,}8 = 26{,}52 = 2{,}652 \times 10^1$.

Conclusion : $3\,400 \times 0{,}078 = 2{,}652 \times 10^1 \times 10^1 = 2{,}652 \times 10^2 = 265{,}2$.

Dernier point plus théorique concernant les puissances de 10 : elles sont utilisées en algèbre pour la définition formelle d'un nombre décimal.

La première définition d'un nombre décimal rencontrée à l'école consiste à dire qu'il s'agit d'un nombre que l'on peut écrire sous une forme décimale, c'est-à-dire un nombre entier suivi d'une virgule et d'un nombre fini de décimales. 265,23 est un nombre décimal appartenant à $\mathbb{D}$, tandis que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal (puisque le nombre de décimales est infini, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$).

Algébriquement parlant, on définit un nombre décimal comme un nombre qui peut être écrit sous forme d'une fraction admettant au dénominateur une puissance de 10. Ainsi, $265{,}23=\frac{26\,523}{100}=\frac{26\,523}{10^2}$ est bien un nombre décimal.
De manière générale, si un nombre décimal comporte un nombre p de décimales après la virgule, on peut l'écrire comme une fraction de dénominateur 10^p. Par exemple : $12,\underbrace{45\ldots876}_{p \text{ décimales}}=\frac{1\,245\ldots876}{10^p}$.

Notes

- On retrouve bien avec cette définition que tout nombre entier est décimal, puisqu'il peut être écrit comme fraction comportant 10^0 au dénominateur. Ainsi $456=\frac{456}{1}=\frac{456}{10^0}$.
- On retrouve également que tout nombre décimal pouvant être écrit sous forme de fraction, il est également un nombre rationnel.

Complément

- Les fractions qui sont également des nombres décimaux sont celles qui, dans leur forme irréductible, comportent un dénominateur dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que des 2 et des 5.

Exemple : $\frac{3}{8}$ est un nombre décimal car $8=2^3$.
On vérifie que $\frac{3}{8}=0{,}375=\frac{375}{1000}$

Exemple : $\frac{7}{20}$ est un nombre décimal car $20=2^2\times 5$.
On vérifie que $\frac{7}{20}=0{,}35=\frac{35}{100}$

- Les autres fractions ne sont pas des nombres décimaux.

Exemple $\frac{1}{21}$ et $\frac{7}{30}$ ne sont pas des nombres décimaux, car la décomposition en facteurs premiers de leurs dénominateurs comporte d'autres nombres que 2 et 5 : $21 = 3 \times 7$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Chapitre 4
Calcul littéral

1. Généralités

1.1. Pourquoi utiliser des lettres dans un calcul ?

Le calcul littéral signifie le calcul avec des lettres. On peut se demander pourquoi il est nécessaire d'utiliser des lettres et pourquoi on ne fait pas des calculs uniquement avec des nombres.

Une première utilisation des lettres, certes un peu anecdotique mais qui n'en est pas moins très pratique, est de nommer des nombres qu'il est impossible d'écrire. Ainsi la lettre grecque « π » que nous avons déjà rencontrée en tant qu'exemple de nombre irrationnel. De même, la lettre « e » qui représente un autre nombre irrationnel, parfois appelé nombre d'Euler en référence au célèbre mathématicien suisse Leonhard Euler (mais à ne pas confondre avec la constante d'Euler, notée « gamma » γ) ou constante de Neper (par une francisation du nom du mathématicien écossais John Napier).

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, une utilisation intuitive des lettres est d'exprimer des formules qui sont vraies pour tous les nombres. Ainsi, nous avons présenté les formules de calcul de puissances ou la propriété de distributivité avec des lettres, puisqu'au-delà d'exemples numériques, les lettres permettent d'indiquer le caractère « universel » des formules ou propriétés en question.

Une troisième utilisation qu'il est fondamental de comprendre est liée à la notion d'inconnue. Bien souvent, en pratique, on a besoin de déterminer un

nombre que l'on ne connaît pas mais qui vérifie certaines conditions. Imaginons par exemple que pour un transport de meubles, deux entreprises proposent les tarifs suivants :

- chargement : 115 € puis 1,75 € du kilomètre
- chargement : 125 € puis 1,55 € du kilomètre

On voit qu'au départ, le 1er tarif est plus avantageux puisque le chargement est moins cher. Néanmoins, plus on roule, moins le 1er tarif est avantageux, puisque le kilomètre parcouru est facturé plus cher. Si on roule suffisamment, le 2e tarif devient avantageux et la question qui se pose est donc de déterminer la distance à partir de laquelle cela se produit. On utilise une lettre, que l'on choisit, par exemple *x*, qui représente l'inconnue que l'on cherche à déterminer, en l'occurrence la distance parcourue exprimée en kilomètres. On écrit mathématiquement la condition que doit vérifier *x*, c'est-à-dire que le prix payé avec le 2e transporteur devienne inférieur à celui payé avec le 1er. On obtient :

$$\underbrace{125+1,55\times x}_{\substack{\text{Tarif 2 pour} \\ x \text{ km parcourus}}} \underbrace{\leq}_{\text{Inférieur ou égal à}} \underbrace{115+1,75\times x}_{\substack{\text{Tarif 1 pour} \\ x \text{ km parcourus}}}$$

Si la condition imposée au nombre cherché traduit une égalité, on parle d'équation. Si elle traduit une inégalité, comme dans notre exemple, on parle d'inéquation. Les lettres sont donc utilisées pour représenter des inconnues dans des équations ou des inéquations. Trouver la valeur de l'inconnue qui vérifie que l'égalité ou l'inégalité est vérifiée s'appelle résoudre l'équation ou résoudre l'inéquation.

1.2. Premières règles de calcul littéral

Toutes les règles présentées pour le calcul numérique s'appliquent de la même manière au calcul littéral.

On peut noter quelques particularités :

- le signe « × » de la multiplication n'est pas obligatoire devant une lettre, ce qui permet de simplifier l'écriture des expressions et, dans un produit « mixte » lettre-nombre sans signe « × », on place toujours le nombre avant la lettre.
  Par exemple :
  $3\times a=3a$; $b\times 25=25\times b=25b$; $x\times 2\times y=2xy$
  De même, la formule de la distributivité s'écrit sans signe « × » :
  $k(a+b)=ka+kb$.
  Complétons au passage cette règle par le fait qu'elle s'applique également devant une parenthèse. Par exemple : $3\times(4+a)=3(4+a)$.

Remarque $1\times x=1x$ se note *x*, sans besoin d'indiquer le chiffre 1.

- On peut additionner « des poires avec des poires » et des « pommes avec des pommes », mais pas des « poires avec des pommes ». En d'autres termes, dans un calcul littéral, on peut finaliser une opération entre lettres lorsqu'il s'agit de la même lettre. Dans cas contraire, on pose le calcul mais on ne peut finaliser l'opération. Par exemple :
- $5a+3a=8a$. De la même manière que « 5 pommes » additionnées à « 3 pommes » donnent 8 pommes, l'addition peut être réalisée avec la lettre a. On notera au passage qu'en appliquant la propriété de distributivité, ce calcul peut s'écrire : $5a+3a=(5+3)a$, soit $8a$.
- En revanche, l'opération $5a+8x$ ne peut pas être simplifiée tant que l'on ne connaît pas les valeurs de a et x. Le résultat de « 5 pommes » additionnées à « 8 bananes » ne peut pas s'exprimer uniquement en pommes ou bananes. De même, on obtient $3a+2+2a=5a+2$. On additionne les « a » entre eux mais on ne peut pas simplifier davantage l'écriture tant que l'on ne connaît pas la valeur de a.
- Cette manière de faire s'applique à toutes les opérations. Ainsi, le calcul de l'expression $A=10-2a+a(4+a)+2\times a^2-5$ se fait de la manière suivante :
  $A=10-2a+4a+a^2+2a^2-5$ (on applique la distributivité et la simplification d'écriture à $a(4+a)=a\times 4+a\times a=4a+a^2$).
  Puis : $A=a^2+2a^2-2a+4a+10-5=3a^2+2a+5$
  (on regroupe les « pommes », ici les termes de « même nature » : a^2, a, puis les nombres 10 et 5).

2. Développement et factorisation

Une fois posés les principes précédents, il convient de se familiariser un peu avec les calculs. En effet, la maîtrise du développement et de la factorisation d'une expression est nécessaire pour être capable de mener à bien la résolution des équations et des inéquations qui reste, de par ses applications pratiques, un point incontournable du calcul littéral.

2.1. Développement

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, le développement découle de la propriété de distributivité et permet de transformer un produit en une somme ou une différence.

Il s'agit de calculs du type :

$k(a+b)=ka+kb$ $\qquad$ $(a+b)k=ak+bk$

$k(a-b)=ka-kb$ $\qquad$ $(a-b)k=ak-bk$

On peut avoir besoin de ce que l'on appelle au collège la « double distributivité » et qui se formalise de la manière suivante :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Cette formule revient à appliquer deux fois la distributivité. La première fois en considérant $k=(c+d)$ dans la 3e formule ci-dessus, ce qui donne :
$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$.

Et la deuxième fois en utilisant la 1re formule ci-dessus successivement pour $k=a$ puis $k=b$, ce qui donne $a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Si l'on combine avec des signes « – », on obtient les formules complémentaires, en se rappelant les règles de produit de signes vues au chapitre 3 :

$$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$$

$$(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$$

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

Une fois que l'on a développé des expressions, on les simplifie en regroupant les termes de même nature comme exposé dans le paragraphe précédent.

Exemple Voici deux exemples de développement.

- $A=4-2(3-x)+4x=4-2\times3+2x+4x$.

  Dans cette première étape, on a utilisé la distributivité pour supprimer les parenthèses.

  Puis :

  $A=4-6+2x+4x$ On effectue les calculs intermédiaires

  $A=-2+6x$ On regroupe les termes de même nature

- $B=(4-2)(3-x)-(4x-5)=4\times3-4x-2\times3+2x-4x+5$

  $B=12-4x-6+2x-4x+5$

  $B=11-6x$

2.2. Factorisation

La factorisation découle également de la propriété de distributivité et permet, à l'inverse du développement, de transformer une somme ou une différence en un produit.

Il s'agit de calculs du type :

$ka+kb=k(a+b)$ $ak+bk=(a+b)k$

$ka-kb=k(a-b)$ $ak-bk=(a-b)k$

La factorisation est une opération un petit peu plus complexe que le développement, car elle nécessite d'identifier le « k » qui sera mis en facteur.

Exemple

- $A=3a+6 = 3a+3\times 2=3(a+2)$
  On a mis en évidence le facteur 3, commun aux deux produits $3\times a$ et 3×2 puis utilisé la propriété de distributivité.
- De même : $B=4ab-2b^2=2b\times 2a-2b\times b = 2b(2a-b)$
  On a mis en évidence le facteur $2b$, commun aux deux produits $4ab=2b\times 2a$ et $2b^2=2b\times b$ puis utilisé la propriété de distributivité.

Le facteur commun « k » peut être lui-même une expression plus compliquée, par exemple :

$$C=\underbrace{(x+2)}_{k}(3-x)-(4+x)\underbrace{(x+2)}_{k}=\underbrace{(x+2)}_{k}[(3-x)-(4+x)]$$

On identifie le facteur $(x+2)$, commun aux deux produits $(x+2)(3-x)$ et $(4+x)(x+2)$, puis on utilise la commutativité de la multiplication $(4+x)(x+2)=(x+2)(4+x)$, et enfin la propriété de distributivité, avec $k=(x+2)$, $a=(3-x)$ et $b=(4+x)$.

On finalise alors le calcul en simplifiant le contenu de la deuxième parenthèse.

$C=(x+2)(3-x-4-x)=(x+2)(-1-2x)$.

Enfin, le facteur « k » n'est pas forcément évident à identifier :

$D=(x+2)(3-x)-(2x-6)(5+x)=(x+2)(3-x)-(-2)(-x+3)(5+x)$

On remarque que $(2x-6)=-2(-x+3)$ afin de faire apparaître le facteur commun $k=3-x=-x+3$

On a alors : $D=(3-x)((x+2)-(-2)(5+x))=(3-x)(x+2+2\times 5+2x)$

C'est-à-dire $D=(3-x)(3x+12)$.

2.3. Identités remarquables

Les identités remarquables sont des égalités qui peuvent être utiles à deux titres :

- elles permettent de gagner du temps lorsque l'on effectue un développement,
- elles permettent de factoriser des expressions dans lesquelles on ne voit pas apparaître le facteur commun « k ».

Considérons deux nombres quelconques a et b. Par application de la définition d'un carré et de la double distributivité, on obtient :

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$.

Mais par commutativité de la multiplication $ab = ba$, et donc :
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Un calcul similaire montre que :
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

De même en développant et en simplifiant l'expression, le lecteur pourra vérifier que l'on obtient :
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Les trois identités remarquables sont donc :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Lues de gauche à droite, elles expriment un développement, lues de droite à gauche, elles expriment une factorisation.

Exemples de développement

- $(x-4y)^2 = x^2 - 2x \times 4y + (4y)^2 = x^2 - 8xy + 16y^2$.
  On a utilisé la 2e identité remarquable avec $a = x$ et $b = 4y$.
- $(5+x)(5-x) = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$.
  On a utilisé la 3e identité remarquable avec $a = 5$ et $b = x$.

Exemples de factorisation

- $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2 = (3x+2y)^2$.
  On a utilisé la 1re identité remarquable avec $a = 3x$ et $b = 2y$.
- $(x+1)^2 - 9 = (x+1)^2 - 3^2 = ((x+1)+3)\,((x+1)-3)$.
  Soit $(x+1)^2 - 9 = (x+1+3)\,(x+1-3) = (x+4)(x-2)$.
  On a utilisé la 3e identité remarquable avec $a = x+1$ et $b = 3$.

Les identités remarquables peuvent également être utiles en calcul numérique et en particulier en calcul mental :
$98 \times 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9\,996$.
On a utilisé la 3e identité remarquable avec $a = 100$ et $b = 2$.
$102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 + 400 + 4$.
$102^2 = 10\,404$. On a utilisé la 1re identité remarquable avec $a = 100$ et $b = 2$.

3. Équation et inéquation du 1er degré

3.1. Équation du 1er degré à une inconnue

L'équation du 1er degré tient son nom du fait que l'inconnue est présente à la puissance 1. Il s'agit d'une égalité dans laquelle apparaissent des nombres et une unique inconnue, dont l'exposant ne peut pas dépasser 1.

Par exemple : $-3x+4=0$; $2a-5=3-5a$; $4\left(y-2\right)-5y=3y-2\left(-2-y\right)$ sont des équations du 1er degré à une inconnue, respectivement x, a et y (rappelons que $x^1=x$, $a^1=a$, $y^1=y$ et que les inconnues sont donc bien à la puissance 1 dans les équations ci-dessus).

Exemples d'équations de nature différente

- $3x^2+4=0$ n'est pas une équation du 1er degré car l'inconnue x est à la puissance 2. C'est une équation du second degré.
- $2a-5=3-5b$ est une équation du 1re degré à deux inconnues a et b.
- $4y\left(y-2\right)-5y=3y-2\left(2-y\right)$ n'est pas une équation du 1er degré car le développement de l'expression $4y\left(y-2\right)$ fera apparaître le terme $4y^2$ et donc l'inconnue à la puissance 2.

La résolution de ce type d'équation se fait en trois étapes.

- **1re étape** : On simplifie les expressions situées à droite et à gauche du signe « = ».

  Ainsi, pour nos trois exemples ci-dessus, on obtient :
  - $-3x+4=0$ Rien à faire, car on ne peut pas simplifier plus
  - $2a-5=3-5a$ Rien à faire, car on ne peut pas simplifier plus
  - $4\left(y-2\right)-5y=3y-2\left(-2-y\right)$

    s'écrit $4y-8-5y=3y+4+2y$ en développant l'expression,

    puis $-y-8=5y+4$ en regroupant les termes de même nature.
- **2e étape** : On regroupe d'un côté du signe « = » les termes contenant l'inconnue et de l'autre les nombres seuls.

  Cette deuxième étape se fait en tenant compte du principe suivant : on ne change pas une égalité en additionnant ou en soustrayant le même terme des deux côtés de l'égalité. D'une manière imagée, ce principe peut être vu comme une analogie entre une égalité mathématique et une balance à l'équilibre. Si on ajoute ou si l'on retranche le même poids des deux côtés d'une balance à l'équilibre, celle-ci reste à l'équilibre.

Ainsi, pour nos trois exemples ci-dessus :

- $-3x+4=0$ On décide de garder l'inconnue à gauche et de regrouper les nombres seuls à droite.

  $-3x+4-4=0-4$ On retranche 4 des deux côtés pour supprimer le nombre à gauche.

  $-3x=-4$ On a bien une formulation équivalente de l'équation, laissant l'inconnue d'un côté et un nombre de l'autre.

- $2a-5=3-5a$ On décide de garder l'inconnue à gauche et de regrouper les nombres seuls à droite.

  $2a-5+5a=3-5a+5a$ On ajoute 5a des deux côtés pour supprimer l'inconnue à droite. On obtient $7a-5=3$.

  $7a-5+5=3+5$ On ajoute 5 des deux côtés pour supprimer le nombre à gauche. On obtient $7a=8$, formulation équivalente de l'équation initiale, laissant l'inconnue d'un côté et un nombre de l'autre.

- $-y-8=5y+4$ On décide de garder l'inconnue à droite et de regrouper les nombres seuls à gauche.

  $-y-8+y=5y+4+y$ On ajoute y des deux côtés pour supprimer l'inconnue à gauche.

  $-8-4=6y+4-4$ On soustrait 4 des deux côtés pour supprimer les nombres seuls à droite. On obtient $-12=6y$.

Ainsi nos trois équations sont désormais écrites sous formes d'égalités entre un terme contenant l'inconnue et un nombre.

$-3x=-4$; $7a=8$; $-12=6y$.

On notera que l'inconnue peut être située à droite ou à gauche de l'égalité.

- **3e étape** : On résout l'équation en constatant qu'elle traduit désormais qu'un produit contenant une inconnue est égal à un nombre. Cela signifie, par définition de la division, que l'inconnue est égale au quotient du nombre par le facteur apparaissant dans le produit.

On a donc : $x=\dfrac{-4}{-3}$; $a=\dfrac{8}{7}$; $\dfrac{-12}{6}=y$.

Note Cette étape peut également être vue comme le fait que l'on divise de part et d'autre l'égalité par le coefficient de l'inconnue :

➞ $-3x=-4$ s'écrit alors $\dfrac{-3x}{-3}=\dfrac{-4}{-3}$, soit $x=\dfrac{-4}{-3}$

➞ $7a=8$ s'écrit $\dfrac{7a}{7}=\dfrac{8}{7}$, soit $a=\dfrac{8}{7}$

➞ $-12=6y$ s'écrit $\dfrac{-12}{6}=\dfrac{6y}{6}$, soit $\dfrac{-12}{6}=y$

- L'équation $-3x+4=0$ a donc pour solution le nombre $\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

  On vérifie en effet que pour $x=\frac{4}{3}$, on a :

  $-3\times\frac{4}{3}+4=\frac{-3\times4}{3}+4=\frac{-12}{3}+4=-4+4=0.$

- L'équation $2a-5=3-5a$ a donc pour solution le nombre $\frac{8}{7}$.

  On vérifie en effet que pour $a=\frac{8}{7}$, on a d'une part :

  $2\times\frac{8}{7}-5=\frac{2\times8}{7}-5=\frac{16}{7}-\frac{5\times7}{7}=\frac{16-35}{7}=\frac{-19}{7}.$

  et d'autre part : $3-5\times\frac{8}{7}=3-\frac{5\times8}{7}=\frac{3\times7}{7}-\frac{40}{7}=\frac{21-40}{7}=\frac{-19}{7}.$

  L'égalité entre les deux expressions est bien assurée.

- L'équation $4(y-2)-5y=3y-2(-2-y)$ a donc pour solution le nombre $\frac{-12}{6}=-2.$

  On vérifie en effet que, pour $y=-2$, on a d'une part,

  $4(-2-2)-5\times(-2)=4\times(-4)-5\times(-2)=-16+10=-6.$

  et d'autre part :

  $3\times(-2)-2\left(-2-(-2)\right)=-6-2\times(-2+2)=-6-2\times0=-6.$

  L'égalité entre les deux expressions est bien assurée.

Deux remarques

1. Les étapes et calculs ci-dessus peuvent être menés plus ou moins vite, de façon plus ou moins détaillée, suivant les capacités de chacun. L'important est de comprendre ce que l'on fait et d'aller à son rythme. Il faut éventuellement se méfier de la « recette » souvent entendue et parfois mal assimilée « on passe le terme de l'autre côté en changeant son signe » qui est censée exprimer les manipulations de la 2e étape présentées ci-dessus.
Dans le 1er exemple ci-dessus, $-3x+4=0$, on a obtenu $-3x=-4$ en soustrayant 4 des deux côtés, ce qui est justifié d'un point de vue algébrique. Cela revient en terme d'écriture à appliquer la recette : « on passe 4 de l'autre côté en changeant son signe » en -4. Le problème apparaît quand le raccourci de la recette n'est en fait pas compris et que l'on voit, comme on le constate régulièrement, un élève finir la résolution de l'équation par $x=\frac{-4}{3}$ car il « passe -3 de l'autre côté en changeant son signe » en 3, au lieu de diviser par -3. La recette ne concerne pas la 3e étape et l'élève ne comprend pas le sens algébrique caché qu'elle contient.

2. Dans la 3e étape, il se peut que l'on obtienne un coefficient de l'inconnue sous forme de fraction, par exemple $\frac{5}{3}x=7$. Cela ne change rien et on applique la méthode en divisant par $\frac{5}{3}$, en se rappelant que diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Donc $x=7\div\left(\frac{5}{3}\right)=7\times\frac{3}{5}=\frac{21}{5}$.

Pour finir, nous pouvons synthétiser ce qui précède en formulant qu'une équation du 1er degré à une inconnue x peut de manière générale s'exprimer sous la forme $ax+b=0$, où a et b sont deux réels et a est différent de zéro.
La solution de l'équation s'obtient grâce à la méthode exposée ci-dessus : $ax+b-b=0-b$, soit $ax=-b$, puis $x=-\frac{b}{a}$.

Une équation du 1er degré à une inconnue peut se ramener à une équation de la forme $ax+b=0$ avec a différent de zéro. Elle admet une solution unique $x=-\frac{b}{a}$.

3.2. Inéquation du 1er degré à une inconnue

3.2.1. Résolution de l'inéquation

L'inéquation est similaire à l'équation du 1er degré, à cela près que l'on est en présence d'une inégalité et non d'une égalité.

Exemple $3-4x>6(2-x)+5$

La méthode de résolution est analogue à celle utilisée pour une équation. En particulier, les deux premières étapes sont les mêmes.

- **1re étape** : on simplifie les expressions situées à droite et à gauche de l'inégalité :
  $3-4x>6(2-x)+5$
  $3-4x>6\times2-6x+5$
  $3-4x>17-6x$
- **2e étape** : on regroupe d'un côté les termes contenant l'inconnue et de l'autre les nombres seuls.

On ajoute $6x$ des deux côtés pour regrouper les inconnues à gauche.

$3-4x+6x>17-6x+6x$

$3+2x>17$

On soustrait 3 des deux côtés pour regrouper les nombres à droite.

$3+2x-3>17-3$

$2x>14$

La différence avec l'équation provient de la **3e étape.**

En effet, le signe du coefficient de l'inconnue intervient :

- On ne change pas une inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre positif non nul chacun de ses membres.
- On inverse le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre négatif non nul chacun de ses membres.

Dans le cas ci-dessus, ce coefficient est positif, égal à deux.
On peut donc diviser sans changer le sens de l'inégalité : $\frac{2x}{2}>\frac{14}{2}$
Au final : $x>7$.
Tous les nombres strictement supérieurs à 7 sont solutions de l'inéquation.
En d'autres termes, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]7\,;+\infty\right[$.

On notera que si l'on regroupe les inconnues à droite et non à gauche on obtient : $3-4x>17-6x$, puis on ajoute $4x$ des deux côtés pour regrouper les inconnues à droite.

$3-4x+4x>17-6x+4x$

$3>17-2x$

On soustrait 17 des deux côtés pour regrouper les nombres à gauche.

$3-17>17-2x-17$

$-14>-2x$

Le coefficient de l'inconnue est alors négatif, égal à -2.
On doit donc changer le signe de l'inégalité lorsque l'on divise : $\frac{-14}{-2}<\frac{-2x}{-2}$.
Au final : $7<x$
On retrouve bien le même ensemble de solutions : $\left]7\,;+\infty\right[$.

Note La méthode reste identique quelle que soit la nature de l'inégalité : $<, \leq, >, \geq$.

3.2.2. Tableau de signe

Toute inéquation du 1er degré se ramène à une inéquation de la forme $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$ ou $ax+b\leq 0$, avec $a\neq 0$. Elle revient donc à étudier le signe de l'expression $ax+b$.

Dans la résolution de $ax+b>0$, on écrit $ax>-b$, puis on divise les deux termes de l'inégalité par a.

- Si $a>0$, on obtient $x>-\frac{b}{a}$
- Si $a<0$, on obtient $x<-\frac{b}{a}$

  Pour l'inégalité inverse « < », on obtient des résultats inversés.

On introduit le tableau de signe qui permet de synthétiser le signe de l'expression et par suite de résoudre les différentes inéquations.

- Pour $a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

  L'expression $ax+b$ est négative pour x dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[$, nulle pour $x=-\frac{b}{a}$ et négative pour x dans l'intervalle $\left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$.

- Pour $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

  L'expression $ax+b$ est positive pour x dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[$, nulle pour $x=-\frac{b}{a}$ et négative pour x dans l'intervalle $\left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$.

3.3. Système d'équations du 1er degré à deux inconnues

3.3.1. Généralités

Il peut être nécessaire de déterminer deux inconnues. À titre d'illustration, voici un exemple classique de problème proposé en milieu scolaire : « Un musée affiche un tarif adultes de 8 euros et un tarif enfants de 5 euros. Lors d'une journée, ce musée reçoit la visite de 243 personnes pour une recette totale de 1 665 euros. Combien d'adultes et d'enfants ont visité le musée ? ». Il faut alors déterminer deux inconnues : le nombre d'adultes et le nombre d'enfants.

Nous allons nous intéresser uniquement aux équations du premier degré, c'est-à-dire dans lesquelles les deux inconnues, par exemple x et y sont présentes avec un exposant égal à 1.

Dans notre exemple, si x désigne le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants, on peut écrire deux équations :

- d'une part, $x+y=243$: le nombre total de visiteurs est 243.
- d'autre part, $8x+5y=1665$: la recette totale est constituée de la recette « adultes » et de la recette « enfants ».

On notera au passage que si l'on avait deux inconnues et une seule équation, on ne pourrait pas déterminer une solution unique au problème. Par exemple, dans notre cas, si on ne connaît pas la recette, on ne peut qu'utiliser l'équation $x+y=243$ et un grand nombre de solutions sont possibles, par exemple :

- aucun enfant n'a visité le musée : $x=243$ et $y=0$
- aucun adulte n'a visité le musée : $x=0$ et $y=243$
- toute solution intermédiaire comme 43 adultes et 200 enfants : $x=43$ et $y=200$.

Si l'on dispose de deux équations, on peut avoir une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions au problème posé.

Deux méthodes sont utilisées pour résoudre ce genre de problème, qui comporte deux équations et deux inconnues, et que l'on désigne comme un système d'équations à deux inconnues. En termes de notation, on indique par une accolade que les deux équations sont liées et constituent un système d'équations. Dans notre exemple :

$$\begin{cases} x+y=243 \\ 8x+5y=1665 \end{cases}$$

Les deux méthodes utilisent des techniques calculatoires différentes mais sont basées sur un même principe qui est de se ramener à résoudre successivement deux équations du 1er degré à une inconnue.

3.3.2. Substitution

Dans cette méthode, on exprime une inconnue en fonction de l'autre grâce à une équation et on utilise cette expression dans la deuxième équation afin de se ramener à une équation à une inconnue.

Dans notre exemple, on peut écrire $x=243-y$, grâce à la 1re équation.
On substitue alors à x cette expression dans la 2e équation pour obtenir $8(243-y)+5y=1665$.

On résout alors cette équation du 1er degré à une inconnue :

$8 \times 243 - 8y + 5y = 1\,665$

$1\,944 - 3y = 1\,665$

$1\,944 - 1\,665 = 3y$

$y = \frac{1\,944 - 1\,665}{3} = 93$

On a déterminé le nombre d'enfants, égal à 93. On revient alors à la première équation $x = 243 - y$, qui nous donne $x = 243 - 93$ soit $x = 150$.

150 adultes et 93 enfants ont visité le musée.

3.3.3. Combinaison

Dans cette méthode, on « combine » les deux équations afin de faire disparaître une inconnue. « Combiner » signifie que l'on peut multiplier ou diviser les équations et les ajouter ou soustraire entre elles. En effet une égalité reste vérifiée si l'on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre. De même si deux égalités sont vérifiées, la somme et la différence de leurs termes restent une égalité.

Dans notre exemple, on observe que si on multiplie la 1re équation par 5, les coefficients de l'inconnue y seront égaux à 5 dans les deux équations. En soustrayant les deux équations, l'inconnue y disparaîtra.

On peut écrire :

$x + y = 243$ est équivalent à $5 \times \left(x + y\right) = 5 \times 243$ (on a multiplié l'équation par 5), c'est-à-dire $5x + 5y = 1\,215$.

Puis en soustrayant entre elles les deux équations :

$8x + 5y - \left(5x + 5y\right) = 1\,665 - 1\,215.$

$8x + 5y - 5x - 5y = 450.$

$3x = 450.$

$x = \frac{450}{3} = 150.$

On remplace alors x par 150 dans une des deux équations initiales et on obtient $150 + y = 243$, c'est-à-dire $y = 93$.

Cette méthode est souvent la plus rapide. Il suffit d'imaginer une combinaison simple permettant de faire « disparaître » une inconnue.

À titre d'illustration, voici un 2e exemple.

On cherche à résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$

On observe que si on multiplie la 1re équation par 2 et la 2e par 3, les coefficients de l'inconnue y seront respectivement -6 et 6. En additionnant les deux équations, l'inconnue y disparaîtra.

On obtient donc :
$2\times(2x-3y)=2\times10$, soit $4x-6y=20$,
et $3\times(5x+2y)=3\times5$, soit $15x+6y=15$,
puis en ajoutant les deux équations : $4x-6y+15x+6y=20+15$,
soit $19x=35$ et finalement $x=\dfrac{35}{19}$.
On remplace alors x par sa valeur dans une équation, par exemple la 1re.
$2\times\dfrac{35}{19}-3y=10$, et on obtient $\dfrac{70}{19}-10=3y$, c'est-à-dire $3y=\dfrac{70-190}{19}$, et au final $y=-\dfrac{40}{19}$.

Pour terminer, donnons deux exemples de cas où un système n'admet aucune solution ou bien une infinité de solutions.

Voici un exemple de système n'admettant pas de solution :
$$\begin{cases}2x-3y=10\\4x-6y=0\end{cases}$$
On constate qu'en multipliant la 1re équation par 2, on obtient $4x-6y=20$. Or $4x-6y$ ne peut pas être à la fois égal à 20 et à 0. Les équations sont dites incompatibles.

Voici un exemple admettant une infinité de solutions :
$$\begin{cases}2x-3y=10\\4x-6y=20\end{cases}$$
On constate qu'en multipliant la 1re équation par 2, on obtient $4x-6y=20$. On est en fait ramené à une seule équation. Il y a donc une infinité de solutions. Les équations sont dites linéairement dépendantes.

Pour aller plus loin

On peut généraliser ce type de problème à des systèmes d'équations du 1er degré comportant un nombre « n » d'inconnues et un nombre « p » d'équations. Le lecteur intéressé pourra à ce sujet consulter des livres d'algèbre linéaire du supérieur traitant de systèmes d'équations.

4. Équation et inéquation du 2nd degré à une inconnue

4.1. Équation du 2nd degré à une inconnue

Une équation du second degré à une inconnue, est une équation dans laquelle l'unique inconnue est présente à la puissance 2, et de manière optionnelle à la puissance 1.

Exemples d'équations du 2nd degré à une inconnue

$$3x^2+4x-5=6x-2$$
$$2x(x-1)=2x-2$$
$$3x^2=-7-x$$

4.1.1. L'équation $x^2 = a$

Avant d'étudier la méthode générale de résolution d'une équation du second degré, nous allons nous intéresser au cas particulier d'une équation du type $x^2=a$ où a est un nombre réel quelconque. Par exemple :
$x^2=9$ ou $x^2=-9$ ou $x^2=0$

Notons tout d'abord qu'un carré est toujours un nombre positif ou nul.

En effet :

- si x est un nombre strictement positif, $x^2=x\times x$ est strictement positif, en tant que produit de deux nombres strictement positifs (chapitre 3).
- De même, si x est un nombre strictement négatif, $x^2=x\times x$ est strictement positif, en tant que produit de deux nombres strictement négatifs (chapitre 3).
- Enfin, si x est égal à zéro, son carré est également égal à zéro.

Ainsi, un carré ne peut pas être strictement négatif et l'équation $x^2=a$ où a est un nombre strictement négatif n'a pas de solution.
Par exemple, l'équation $x^2=-9$ n'a pas de solution. Aucun nombre réel multiplié par lui-même ne peut être égal à −9.
Notons ensuite qu'un nombre et son opposé ont le même carré.

Par exemple : $3^2=3\times 3=9$ et $(-3)^2=(-3)\times(-3)=9$.

Ainsi, si un nombre est une solution de l'équation $x^2=a$ où a est un nombre positif ou nul, son opposé est également solution de l'équation.

Par exemple, 3 est solution de l'équation $x^2=9$ et −3 est donc également solution de cette équation.
On a les résultats suivants :
L'équation $x^2=a$ n'a pas de solution lorsque a est strictement négatif $(a<0)$.

L'équation $x^2 = a$ a deux solutions lorsque a est positif ou nul $(a \geq 0)$, un nombre et son opposé. Dans ce cas, le nombre positif qui est solution de l'équation $x^2 = a$ est appelé racine carrée de a.
Par exemple, 3 est la racine carrée de 9 car 3 est un nombre positif et $3^2 = 9$.
On note ce nombre $\sqrt{a}$.
On a donc par exemple $\sqrt{9} = 3$.
$\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ (opposé de $\sqrt{a}$) sont donc les deux solutions de l'équation $x^2 = a$, c'est-à-dire vérifient $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$
Ainsi $\sqrt{9} = 3$ et $-\sqrt{9} = -3$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = 9$.
De même, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = 2$.
On notera que dans le cas où $= 0$, l'équation s'écrit $x^2 = 0$ et les solutions sont 0 et son opposé -0, c'est-à-dire une seule et même solution, $0 \left(\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0\right)$.

En synthèse

L'équation du second degré à une inconnue $x^2 = a$ où a est un nombre réel :

- N'a pas de solution si $a < 0$.
  Aucun carré ne peut être égal à un nombre strictement négatif.
- A deux solutions si $a > 0$.
  Une solution positive, que l'on note $\sqrt{a}$ et une solution négative, $-\sqrt{a}$.
  $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = 2$.
  $\sqrt{9} = 3$ et $-\sqrt{9} = -3$ sont les deux solutions de l'équation $x^2 = 9$.
- A une solution si $a = 0$.
  0 est l'unique solution de l'équation $x^2 = 0$.

4.1.2. Cas général

D'une manière générale, après simplification et en regroupant tous les termes d'un côté de l'égalité, une équation du 2nd degré à une inconnue peut se ramener à une expression de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Où a est un réel non nul (si $a = 0$ l'équation n'est pas du second degré).

Ainsi, pour les trois exemples cités en début de section :

- $3x^2 + 4x - 5 = 6x - 2$ s'écrit
  $3x^2 + 4x - 5 - 6x = 6x - 2 - 6x$, c'est-à-dire $3x^2 - 2x - 5 = -2$.
  (On retranche $6x$ à gauche et à droite pour ne plus avoir d'inconnue à droite)

Puis $3x^2-2x-5+2=-2+2$

(On ajoute 2 à gauche et à droite pour ne plus avoir de nombres à droite)

On obtient finalement $3x^2-2x-3=0$, c'est-à-dire une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=3$, $b=-2$ et $c=-3$.

- De même, le lecteur vérifiera que :
  $2x(x-1)=2x-2$ s'écrit $2x^2-4x+2=0$, c'est-à-dire
  $ax^2+bx+c=0$, avec $a=2$, $b=-4$ et $c=2$
- $3x^2=-7-x$ s'écrit $3x^2+x+7=0$, c'est-à-dire
  $ax^2+bx+c=0$, avec $a=3$, $b=1$ et $c=7$

La méthode générale consiste à se ramener au cas d'une équation $X^2=A$, vu ci-dessus, au paragraphe 4.1.1.
L'idée est donc de « fabriquer » un carré contenant l'inconnue x à partir de l'expression ax^2+bx+c.

Note Les calculs expliquant la résolution de l'équation générale peuvent apparaître un peu techniques. Le lecteur pourra s'il le désire lire directement la synthèse du paragraphe qui donne les formules utilisées en pratique.

Commençons par mettre a en facteur des termes contenant l'inconnue, on obtient : $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$.

On remarque alors que l'expression entre parenthèses contient le carré x^2 et un produit contenant x. Afin de « fabriquer » le carré cherché, on utilise l'identité remarquable $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, en se disant que $x^2+\frac{b}{a}x$ représente la somme du carré et du double produit (en d'autres termes, « $x^2+\frac{b}{a}x$ » représente le « a^2+2ab » de la formule de l'identité remarquable).
On peut alors écrire :

$$x^2+\frac{b}{a}x=x^2+2\times\frac{b}{2a}x=x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Soit $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

On a fait apparaître l'identité remarquable en faisant jouer à x le rôle du a de la formule et à $\frac{b}{2a}$ le rôle du b de la formule.
On a donc :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c.$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ devient alors :

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{(2a)^2}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

On a le résultat que nous cherchions, à savoir une équation de type $X^2=A$, avec $X=x+\dfrac{b}{2a}$ et $A=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

On sait alors d'après le paragraphe précédent que :

- Si $A<0$, cette équation n'a pas de solution
- Si $A>0$, cette équation a deux solutions $X=x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{A}$ et $X=x+\dfrac{b}{2a}=-\sqrt{A}$
- Si $=0$, cette équation a une unique solution $X=x+\dfrac{b}{2a}=0$

A est le quotient de b^2-4ac par $4a^2$. On sait que $4a^2$ est un nombre strictement positif, comme produit de 4 et du carré a^2 qui est lui-même toujours strictement positif. Ainsi, le signe de A dépend uniquement du signe de b^2-4ac.

Ce terme est appelé discriminant et noté avec la lettre grecque Δ (Delta).

Le calcul de Δ permet donc de savoir si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution.

On a ainsi :

- Si $\Delta=b^2-4ac<0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta=b^2-4ac>0$, l'équation a deux solutions.
- Si $\Delta=b^2-4ac=0$, l'équation a une unique solution.

Il ne nous reste plus qu'à exprimer la ou les solutions.

Cette fin de calcul est la plus « technique » et peut être sautée par le lecteur en 1re lecture.

Dans le cas $\Delta = 0$, les choses sont simples, on a $A = x + \frac{b}{2a} = 0$. En soustrayant $\frac{b}{2a}$ aux deux termes de l'égalité, on obtient $x = -\frac{b}{2a}$.

Dans le cas $\Delta > 0$, on a $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{A}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{A}$. Il nous faut expliciter le calcul de $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$.

D'après les formules sur les puissances vues au chapitre 3, on peut déduire le fait que la racine carrée d'un quotient est le quotient des racines carrées.

Ainsi : $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$.

Nous allons maintenant simplifier l'expression $\sqrt{4a^2}$. D'après les formules sur les puissances vues au chapitre 3, on déduit également que la racine carrée d'un produit est le produit des racines carrées.

Ainsi : $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \times \sqrt{a^2} = 2 \times \sqrt{a^2}$.

Comment exprimer plus simplement $\sqrt{a^2}$?

- Si a est positif, $\sqrt{a^2} = a$. En effet, par définition la racine carrée de a^2 est le nombre positif dont le carré est a^2, c'est donc a.

  On a alors pour l'expression des deux solutions de l'équation :

  $$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{A} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{A} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a donc, en soustrayant $\frac{b}{2a}$ aux deux termes de l'égalité puis en réduisant au même dénominateur :

  $$x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si a est négatif, $\sqrt{a^2} = -a$. En effet, par définition la racine carrée de a^2 est le nombre positif dont le carré est a^2, c'est donc $-a$ (puisque $-a$ est positif et que $(-a) \times (-a) = a^2$).

On a alors pour l'expression des deux solutions de l'équation :

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{A}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou}$$

$$x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{A}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a donc, en soustrayant $\frac{b}{2a}$ aux deux termes de l'égalité puis en réduisant au même dénominateur :

$$x=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On retrouve les deux formules du cas où a est positif.

Nous avons donc terminé la résolution d'une équation quelconque du second degré à une inconnue.

En synthèse

L'équation du second degré à une inconnue $ax^2+bx+c=0$ où a, b, c sont trois nombres réels, a étant non nul :

- n'a pas de solution si $\Delta=b^2-4ac<0$.
- a une solution unique si $\Delta=b^2-4ac=0$, qui est donnée par :
  $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- a deux solutions distinctes si $\Delta=b^2-4ac>0$, qui sont données par :
  $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Δ (lu « Delta ») s'appelle le discriminant.

Note Les notations x_0, x_1, x_2 sont celles utilisées en général dans le système scolaire, elles n'ont aucun caractère obligatoire.

Appliquons ces formules aux trois équations que nous avons mentionnées en début de chapitre.

- Pour $3x^2-2x-3=0$, on obtient :
  $\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-3)=4+36=40$. Le discriminant Δ est strictement positif, l'équation a deux solutions :
  $$x_1=\frac{-(-2)-\sqrt{40}}{2\times3}=\frac{2-\sqrt{40}}{6}=\frac{1-\sqrt{10}}{3} \text{ et } x_2=\frac{2+\sqrt{40}}{6}=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

- Pour $2x^2 - 4x + 2 = 0$, on obtient :

  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$.

  Le discriminant Δ est nul, l'équation a une solution : $x_0 = \dfrac{-(-4)}{2 \times 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

- Pour $3x^2 + x + 7 = 0$, on obtient :

  $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83$.

  Le discriminant Δ est strictement négatif, l'équation n'a pas de solution.

Dernière remarque Le calcul du discriminant permet toujours de résoudre l'équation mais n'est pas forcément la méthode la plus simple. Reprenons l'exemple ci-dessus $2x^2 - 4x + 2 = 0$. En divisant par 2 les termes de l'égalité, on obtient $x^2 - 2x + 1 = 0$. On reconnaît dans le terme de gauche le terme de gauche de l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, avec $a = x$ et $b = 1$.

L'équation est donc équivalente à $(x - 1)^2 = 0$. Or on a vu qu'un carré est nul signifie que le nombre est nul.

On a donc $x - 1 = 0$ et donc $x = 1$. On a ainsi trouvé la solution de l'équation sans aucun calcul.

4.1.3. Factorisation du trinôme

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée un trinôme (elle comporte des termes en la variable x, à trois puissances : 2, 1 et 0). D'après les résultats qui précèdent, on obtient son écriture sous forme d'un produit de facteurs, c'est-à-dire sous sa forme factorisée.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions x_1 et x_2. Le calcul montre alors que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ cette dernière expression étant la forme factorisée du trinôme.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution x_0. On a alors comme forme factorisée $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution. Il n'existe alors pas de forme factorisée du trinôme.

Vocabulaire complémentaire

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées racines du trinôme.

- Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines simples (chaque racine apparaît une fois dans la factorisation).

- Lorsque $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double (la racine apparaît deux fois dans la factorisation puisque $\left(x-x_0\right)^2 = \left(x-x_0\right)\left(x-x_0\right)$).
- Lorsque $\Delta < 0$, on dit que le trinôme n'admet pas de racine.

D'autre part, L'expression $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ qui nous a servi à résoudre l'équation du 2nd degré s'appelle la forme canonique du trinôme.

4.2. Inéquation du 2nd degré à une inconnue

Une inéquation du second degré à une inconnue est une inéquation dans laquelle l'unique inconnue est présente à la puissance 2, et de manière optionnelle à la puissance 1.

Exemples d'équations du 2nd degré à une inconnue

$3x^2+4x-5 \leq 6x-2$

$2x\left(x-1\right) > 2x-2$

$3x^2 < -7-x$

Par les manipulations sur les inéquations vues précédemment (addition ou soustraction de termes) on peut se ramener à :

$3x^2-2x-3 \leq 0$

$2x^2-4x+2 > 0$

$3x^2+x+7 < 0$

Dans le cas général, une inéquation du second degré se ramène à comparer une expression du type ax^2+bx+c avec 0, où a, b, c sont trois nombres réels, a étant non nul. En d'autres termes, résoudre une inéquation du second degré revient à déterminer le signe de l'expression ax^2+bx+c.

La résolution s'appuie sur les résultats de la résolution de l'équation et plus précisément sur la factorisation du trinôme. En effet, on peut étudier le signe de chaque facteur intervenant dans la factorisation et par combinaison des signes d'un produit de facteur, on obtient alors le signe du trinôme.

Si $\Delta = b^2-4ac > 0$, $ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

On dresse ainsi un tableau de signe qui comporte 3 lignes (autant de lignes que de facteurs). D'après ce que l'on a vu dans le paragraphe concernant la résolution des inéquations, on connaît le signe de chaque facteur.

On obtient :

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
Signe de a	Signe de a		Signe de a		Signe de a	
Signe de $x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a	

Dans ce genre de tableau, on combine les signes dans chaque colonne pour avoir le signe de l'expression finale. Par exemple ci-dessus, dans la 1re colonne, qui correspond à l'intervalle $]-\infty\,;x_1[$, on a deux facteurs de signe négatif (qui donnent en les multipliant un signe positif) et un facteur du signe de a. Le produit ax^2+bx+c est donc du même signe que a.

On constate au final que le trinôme est du signe du coefficient de x^2 « à l'extérieur de l'intervalle des racines » et du signe opposé à ce coefficient « entre les racines ».

Si $\Delta=b^2-4ac=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)^2$. Le terme $\left(x-x_0\right)^2$ est toujours positif (c'est un carré). Le signe du trinôme est donc toujours du signe de a et nul en x_0.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de a	Signe de a		Signe de a
Signe de $\left(x-x_0\right)^2$	$+$	0	$+$
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta=b^2-4ac<0$, le signe du trinôme est constant, du signe du coefficient de x^2

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a	

5. Équation et inéquation de degré quelconque à une inconnue

Au-delà du deuxième degré, il n'existe pas réellement de méthode ou formule qui permette de manière systématique de résoudre une équation ou une inéquation de degré quelconque. En revanche, il existe un principe de résolution basé sur la factorisation.

5.1. Équation produit nul

Une équation à une inconnue de degré quelconque n se présente sous la forme générale $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Si on parvient à factoriser l'expression, on obtient ce que l'on appelle une équation « produit nul ». Un produit de facteurs est nul lorsqu'au moins un de ses facteurs est nul. On résout alors chacune des équations qui correspondent au fait d'annuler les différents facteurs du produit.

Par exemple, la forme factorisée de l'expression $2x^3 - 6x^2 - 26x + 30$ est $2(x-1)(x+3)(x-5)$.

On en déduit que les solutions de l'équation $2x^3 - 6x^2 - 26x + 30 = 0$ sont celles de l'équation produit nul $2(x-1)(x+3)(x-5) = 0$. Il s'agit donc des nombres qui annulent un des facteurs du produit, c'est dire des solutions des équations $x-1=0$, ou $x+3=0$ ou $x-5=0$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{1 ; -3 ; 5\}$.

On démontre, mais cela dépasse le périmètre de ce livre, que tout polynôme de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se factorise comme un produit de facteurs du 1er degré et/ou de 2nd degré. Puisque l'on sait déterminer les solutions d'équations du 1er et du 2nd degré on sait donc théoriquement résoudre toute équation de degré quelconque. Encore faut-il réussir à factoriser l'expression initiale car on ne dispose pas de méthode générale pour y parvenir. Dans le cadre du lycée, les énoncés guident les élèves pour les amener à réaliser la factorisation attendue.

5.2. Tableau de signe

Pour une inéquation, on raisonne en tableau de signe. On a vu dans les paragraphes précédents que l'on sait étudier le signe d'une expression du 1er ou du 2nd degré. Si l'on arrive à factoriser le polynôme étudié, on peut donc en déduire son signe.

Si on reprend l'exemple précédent, on peut ainsi construire le tableau suivant :

x	$-\infty$	-3		1		5		$+\infty$
2	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^3-6x^2-26x+30$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble des solutions des différentes inéquations possibles :

$2x^3-6x^2-26x+30>0$: $]-3\,;1[\cup]5\,;+\infty[$

$2x^3-6x^2-26x+30\geq 0$: $[-3\,;1]\cup[5\,;+\infty[$

$2x^3-6x^2-26x+30<0$: $]-\infty\,;-3[\cup]1\,;5[$

$2x^3-6x^2-26x+30\leq 0$: $]-\infty\,;-3]\cup[1\,;5]$

Note Il faut être vigilant sur l'orientation des crochets des intervalles, suivant que l'on accepte ou exclut les bornes, c'est-à-dire suivant que les inégalités des inéquations sont strictes ou larges.

5.3. Équation/Inéquation quotient

De manière générale les équations ou inéquations faisant intervenir des quotients utilisent le même principe de factorisation puisque l'on combine les signes d'un quotient de la même manière que ceux d'un produit. La différence provient du fait que le dénominateur ne peut pas s'annuler et qu'il faut donc exclure le cas échéant les racines du dénominateur.

À titre d'exemple, considérons l'inéquation $x-1\leq\dfrac{1}{x+3}$. Cette inéquation n'a de sens que si $x+3\neq 0$, c'est-à-dire pour $x\neq -3$.

Pour la résoudre, on se ramène à une étude de signe. On obtient :

$x-1-\dfrac{1}{x+3}\leq 0$, soit $\dfrac{(x-1)(x+3)-1}{x+3}\leq 0$, c'est-à-dire $\dfrac{x^2+2x-4}{x+3}\leq 0$.

On veut déterminer le signe du trinôme x^2+2x-4. On a $\Delta=2^2-4\times 1\times(-4)=20$ et donc deux racines :

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{20}}{2\times 1}=\dfrac{-2-2\sqrt{5}}{2}=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=-1+\sqrt{5}$.

On en déduit le tableau de signe suivant pour le quotient :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-3		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+2x-4}{x+3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est donc :

$\left]-\infty\,;-1-\sqrt{5}\right]\cup\left]-3\,;-1+\sqrt{5}\right]$.

On note que dans le tableau, le fait que le quotient ne soit pas défini pour $x=-3$ est traduit par la présence d'une double barre.

Pour aller plus loin

L'étude des équations est un vaste sujet et amène en particulier sur les notions de clôture algébrique (construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ en tant que clôture algébrique de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$), de nombres algébriques et de nombres transcendants. Le lecteur intéressé pourra consulter des ouvrages d'algèbre du supérieur.

Chapitre 5

Fonctions

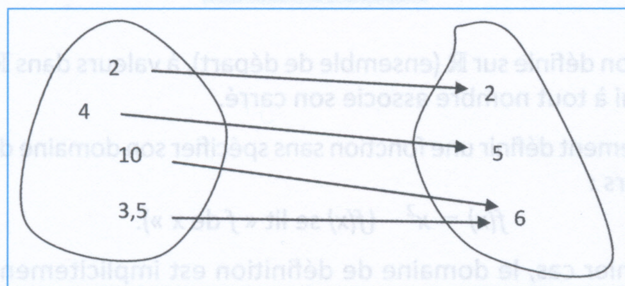
1. Généralités

La notion de fonction est actuellement introduite au collège, en classe de 3e. Elle accompagne ensuite régulièrement l'élève et l'étudiant puisque les fonctions sont présentes dans de nombreux contextes.

De la même manière que dans le langage courant, on dit que « quelque chose est fonction d'une autre chose », la fonction mathématique permet de modéliser le lien qui existe entre divers éléments.

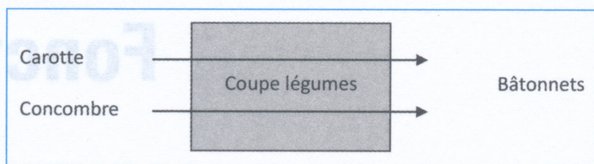
Nous nous limiterons ici au cas de la fonction réelle d'une variable réelle, seul cas étudié au collège et au lycée, c'est-à-dire lorsque la fonction associe à un nombre réel (la variable réelle) un autre nombre réel.

Pour aider à visualiser le concept, on peut imaginer le diagramme ci-dessous :



La fonction associe au nombre 2 le nombre 2, au nombre 4 le nombre 5, au nombre 10 le nombre 6, et au nombre 3,5 à nouveau le nombre 6.

Une autre manière de visualiser une fonction est de considérer qu'elle traduit en mathématiques un processus. De la même manière que dans la « vie réelle » un coupe-légumes produit des bâtonnets, qu'un concombre produira des bâtonnets de concombre et qu'une carotte produira des bâtonnets de carotte, la fonction va appliquer un traitement à un nombre pour produire un nombre.



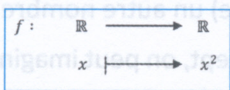
À titre d'illustration, un compteur de taxi applique un traitement à la distance parcourue (un nombre) pour produire le prix à payer (un autre nombre).

Une fonction mathématique est définie par deux éléments caractéristiques :

- Son domaine de définition, c'est-à-dire les nombres auxquels s'applique la fonction. Dans l'analogie avec le coupe-légumes, le domaine de définition est constitué des légumes qui peuvent être découpés en bâtonnets par l'appareil.
- Son expression, qui est le traitement mathématique appliqué à un nombre. Par exemple, la fonction « carré » qui associe à un nombre x son carré, a pour expression x^2.

Une fonction est nommée en général par une lettre (souvent *f* comme fonction...) ou une abréviation (par exemple sin pour sinus).

Ainsi, on définit une fonction de la manière suivante :



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ensemble de départ), à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée), qui à tout nombre associe son carré.

On peut également définir une fonction sans spécifier son domaine de définition. On écrira alors :

$$f(x) = x^2 \quad (f(x) \text{ se lit « } f \text{ de } x \text{ »}).$$

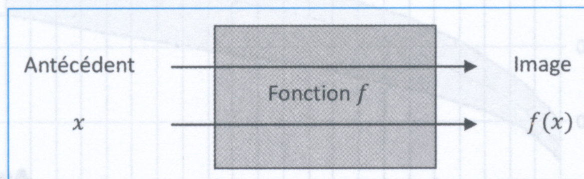
Dans ce dernier cas, le domaine de définition est implicitement défini par l'expression de la fonction.

Exemple

- $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$, puisque tout nombre réel admet un carré.
- $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ puisqu'on ne peut pas diviser un nombre par zéro et donc que la fonction n'est pas définie pour $x = 2$, puisqu'alors, $x-2=0$.

Vocabulaire complémentaire

Le nombre « de départ » s'appelle antécédent, le nombre après traitement s'appelle image.



Ainsi, $f(3)=2$ peut se lire de différentes façons.

- De manière phonétique

f de 3 égale 2.

- De manière sémantique

L'image de 3 par la fonction *f* est 2 (ou 2 est l'image de 3 par la fonction *f*).

Un antécédent de 2 par la fonction *f* est 3 (ou 3 est un antécédent de 2 par la fonction *f*).

On notera au passage que :

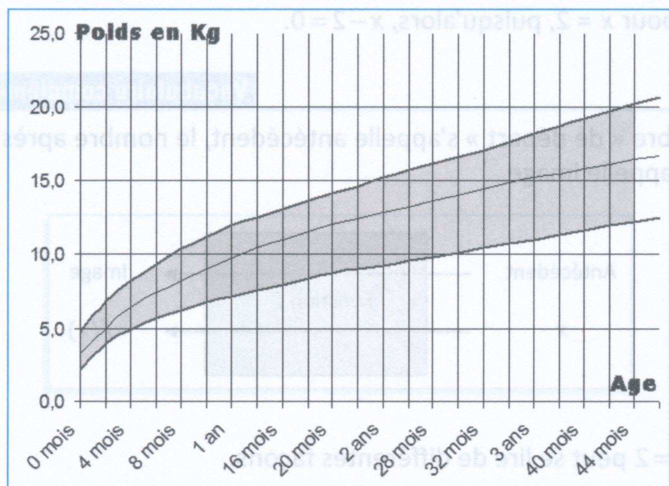
- l'image d'un nombre est toujours unique, quelle que soit la fonction (d'où la formulation « l'image ») ;
- un nombre peut avoir éventuellement plusieurs antécédents par la même fonction (d'où la formulation « un antécédent »). Par exemple, pour la fonction « carré », 2 et –2 ont tous deux pour image 4.

Un tableau de valeurs peut être utilisé pour indiquer certaines valeurs prises par la fonction. Par exemple, dans le cas de la fonction décrite en début de ce chapitre, on obtient :

x	2	4	10	3,5	(antécédent)
$f(x)$	2	5	6	6	(image)

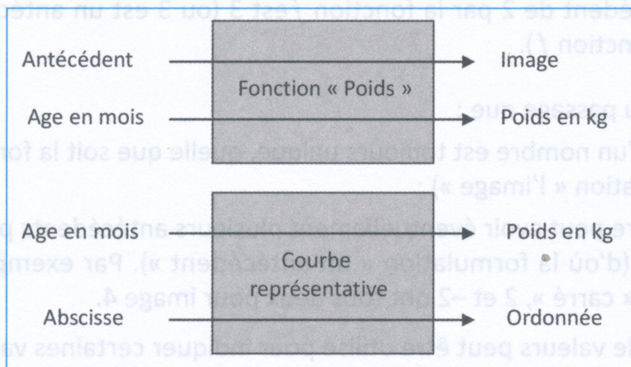
2. Courbe représentative

Une fonction peut être visualisée grâce à sa courbe représentative. À titre d'illustration, la 1re courbe de fonction qui nous concerne en tant qu'individu est généralement celle de notre poids, donné en fonction de notre âge.



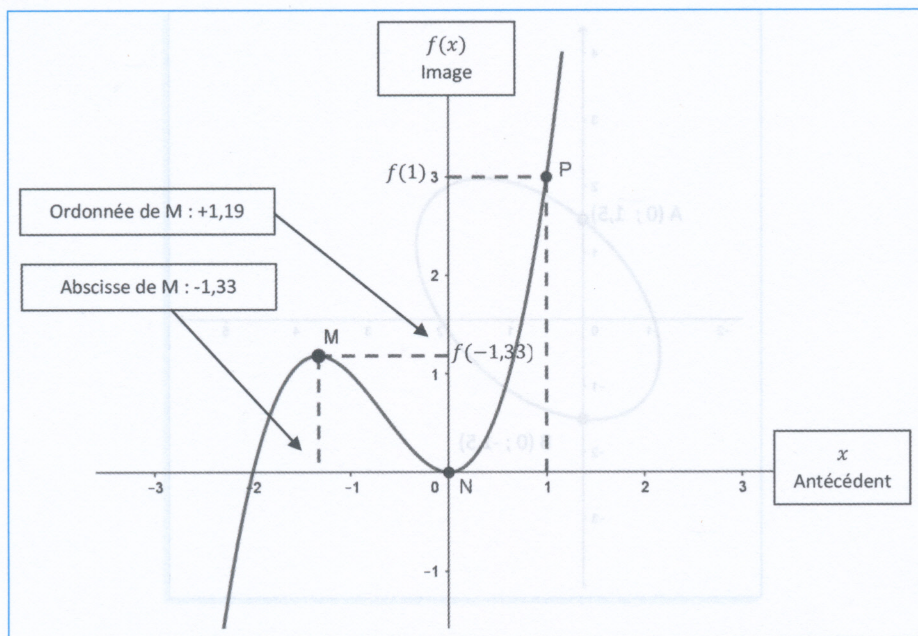
CC Gérard Cohen

En termes mathématiques, la courbe représentative d'une fonction est formée d'un ensemble de points dont chacun est associé à un couple antécédent-image.



Les points de la courbe ont les caractéristiques suivantes :

- Un point de la courbe représentative a une abscisse qui correspond à un antécédent et une ordonnée qui est l'image de cet antécédent par la fonction.
- En d'autres termes, la courbe représentative d'une fonction *f* est constituée de points de coordonnées $\left(x, f(x)\right)$ où *x* parcourt l'ensemble de définition de la fonction.

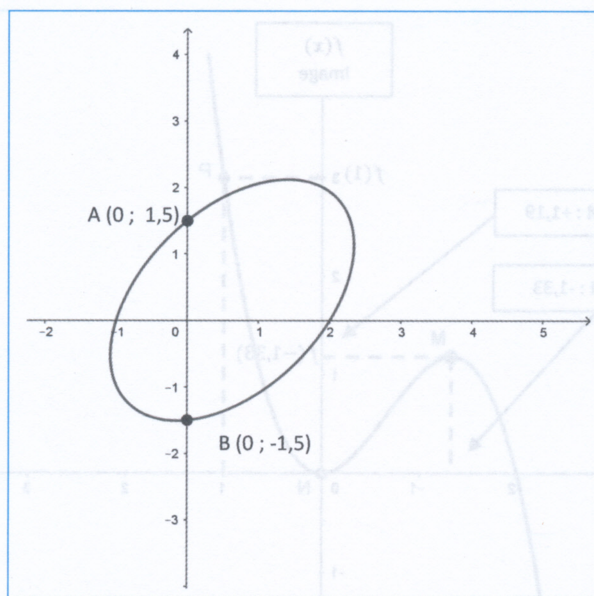


Dans le graphique ci-dessus, les points M et P de coordonnées respectives (–1,33 ; 1,19) et (1 ; 3) appartiennent à la courbe, car $f(-1{,}33)=1{,}19$ et $f(1)=3$.

On notera au passage que toutes les courbes mathématiques ne correspondent pas à des fonctions.

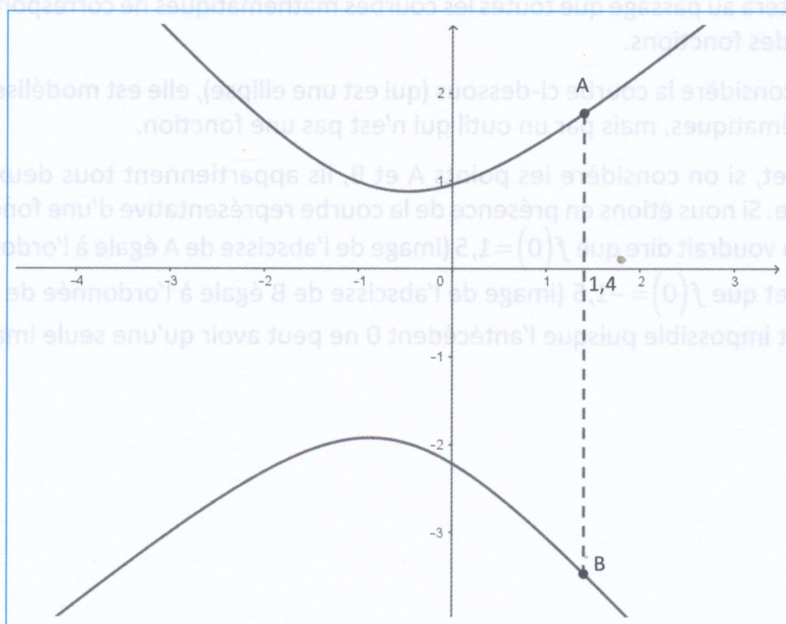
Si on considère la courbe ci-dessous (qui est une ellipse), elle est modélisée en mathématiques, mais par un outil qui n'est pas une fonction.

En effet, si on considère les points A et B, ils appartiennent tous deux à la courbe. Si nous étions en présence de la courbe représentative d'une fonction f, cela voudrait dire que $f(0)=1{,}5$ (image de l'abscisse de A égale à l'ordonnée de A) et que $f(0)=-1{,}5$ (image de l'abscisse de B égale à l'ordonnée de B) ce qui est impossible puisque l'antécédent 0 ne peut avoir qu'une seule image.



De manière intuitive, une courbe qui « revient en arrière » ne peut pas être associée à une fonction.

De même, l'hyperbole ci-dessous ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction. En effet les points A et B ont la même abscisse et le nombre 1,4 ne peut pas avoir deux images.

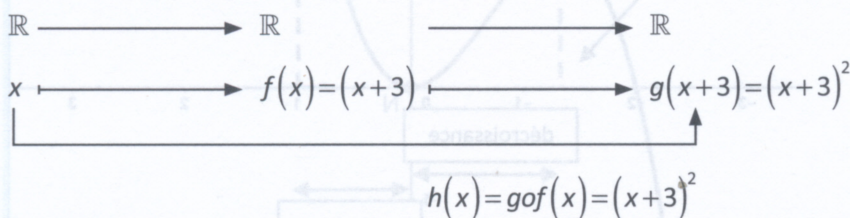


3. Opérations sur les fonctions

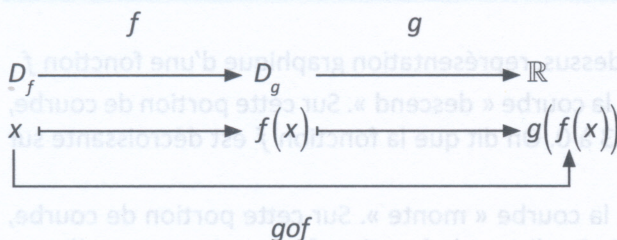
Une fois que l'on dispose de la fonction en tant qu'objet mathématique, on va pouvoir définir des opérations qui agissent sur elle. En voici les principales :

- La multiplication par un réel. Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f et soit k un nombre réel, la fonction kf est la fonction définie sur D_f par $(kf)(x)=kf(x)$.
- L'addition de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de définition D, la fonction $f+g$ est la fonction définie sur D par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- La multiplication de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de définition D, la fonction fg est la fonction définie sur D par $(fg)(x)=f(x)g(x)$.
- La division de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de définition D. Si la fonction g ne s'annule pas, on peut définir la fonction $\frac{f}{g}$ sur D par $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.
- La composition de deux fonctions, notée « o ». Cette opération consiste à appliquer successivement deux fonctions.

Par exemple, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+3)^2$ peut être vue comme la composition de deux fonctions. $h=gof$ où f et g sont respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+3$ et $g(x)=x^2$. On ajoute 3 à un nombre (fonction f) avant de l'élever au carré (fonction g).



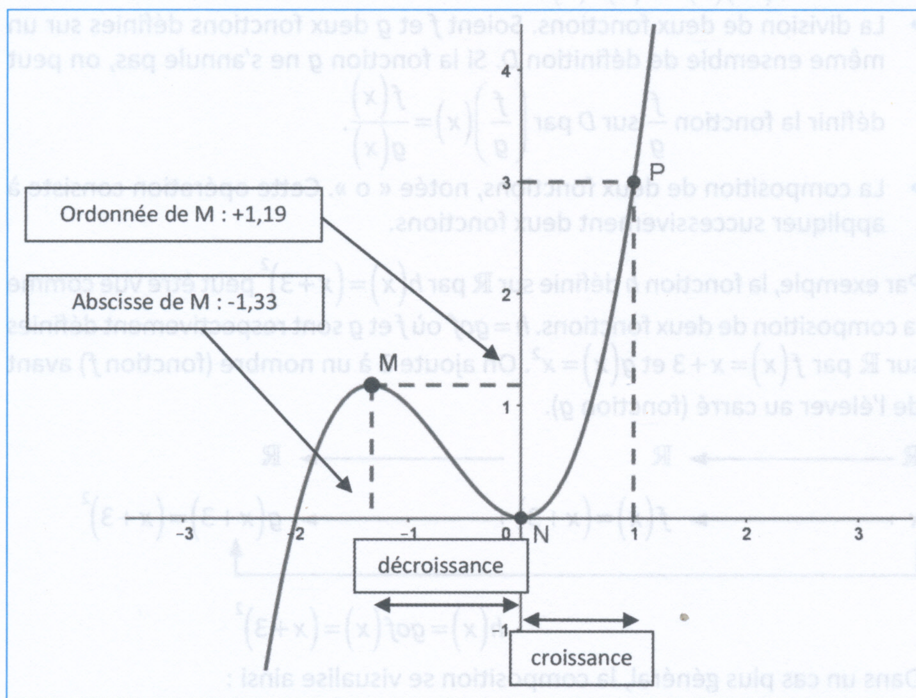
Dans un cas plus général, la composition se visualise ainsi :



On notera que toutes les images $f(x)$ doivent appartenir à l'ensemble de définition D_g de la fonction g. Dans le cas contraire, il ne serait pas possible d'appliquer la fonction g au nombre $f(x)$.

4. Sens de variation

Dans la vie courante, nous sommes intéressés par les variations. Qu'il s'agisse du temps qu'il fait, du poids sur la balance ou d'un cours de bourse, les gens sont avant tout préoccupés par les mouvements que ces grandeurs subissent. Il en va de même pour les fonctions et les mathématiques s'intéressent donc au sens de variation d'une fonction.



Considérons la courbe ci-dessus, représentation graphique d'une fonction f

- Du point M au point N, la courbe « descend ». Sur cette portion de courbe, l'abscisse varie de –1,33 à 0. On dit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle [–1,33 ; 0]
- Du point N au point P, la courbe « monte ». Sur cette portion de courbe, l'abscisse varie de 0 à 1. On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 1]

Il est fondamental de noter que les notions de croissance et décroissance sont intrinsèquement liées à celle d'intervalle. Ainsi, on ne peut par exemple pas dire que la fonction f est croissante ni décroissante sur l'intervalle [–2 ; 1], car elle est successivement croissante sur l'intervalle [–2 ; –1,33], décroissante sur l'intervalle [–1,33 ; 0] puis à nouveau décroissante sur l'intervalle [0 ; 1].

Vocabulaire complémentaire

- Une fonction est dite monotone sur un intervalle si elle est croissante ou bien décroissante sur cet intervalle.
- Le maximum d'une fonction sur un intervalle est la plus grande valeur atteinte. Pour la fonction f présentée ci-dessus, le maximum sur l'intervalle [–2 ; 0] est 1,19, qui est atteint en –1,33. On définit de manière analogue le terme de minimum (le minimum sur l'intervalle [–2 ; 0] est 0, qui est atteint en –2 et en 0). Un extremum est un maximum ou un minimum.

On peut également représenter les variations d'une fonction grâce à un *tableau de variation :*

x	–1,33		0		1
$f(x)$	1,19	↘	0	↗	3

La première ligne indique les variations de la variable x (ici x appartient à l'intervalle [–1,33 ; 1]), c'est-à-dire l'antécédent pour la fonction f, et la deuxième ligne indique les variations correspondantes de l'image $f(x)$. Les flèches précisent le sens de variation.

D'un point de vue graphique on retrouve dans ce tableau que la courbe « descend » du point de coordonnées (–1,33 ; 1,19) jusqu'au point de coordonnées (0 ; 0) puis « remonte » jusqu'au point de coordonnées (1 ; 3).

D'un point de vue analytique, on peut étudier la monotonie d'une fonction f sur un intervalle I de la manière suivante :

On considère deux nombres quelconques a et b appartenant à l'intervalle I.

- Si, pour tous nombres a et b appartenant à l'intervalle I, $a \leq b$ entraîne $f(a) \leq f(b)$, alors la fonction f est croissante sur l'intervalle I.

  D'une manière intuitive, cela signifie, dans le cas d'une fonction croissante, que les images sont classées dans le même ordre que les antécédents : plus un nombre est « petit », plus son image est « petite ».

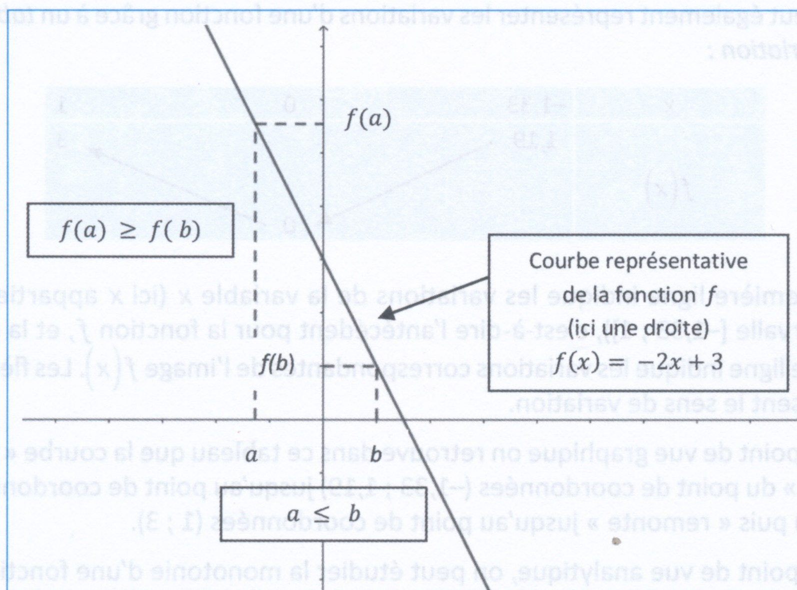
- Si, pour tous nombres a et b appartenant à l'intervalle I, $a \leq b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$, alors la fonction f est décroissante sur l'intervalle I.
  D'une manière intuitive, cela signifie, dans le cas d'une fonction décroissante, que les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : plus un nombre est « petit », plus son image est « grande ».

Illustration Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$ et deux nombres a et b appartenant à $\mathbb{R}$, tels que $a \leq b$.

On a alors $-2a \geq -2b$ (une inégalité change de sens lorsque l'on multiplie ses deux membres par un nombre négatif, ici -2).

Donc $-2a + 3 \geq -2b + 3$ (ajouter 3 à chaque membre ne change pas une inégalité), c'est-à-dire $f(a) \geq f(b)$.

Au final on a montré le résultat suivant : pour tous nombres a et b appartenant à $\mathbb{R}$, $a \leq b$ entraîne $f(a) \geq f(b)$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.



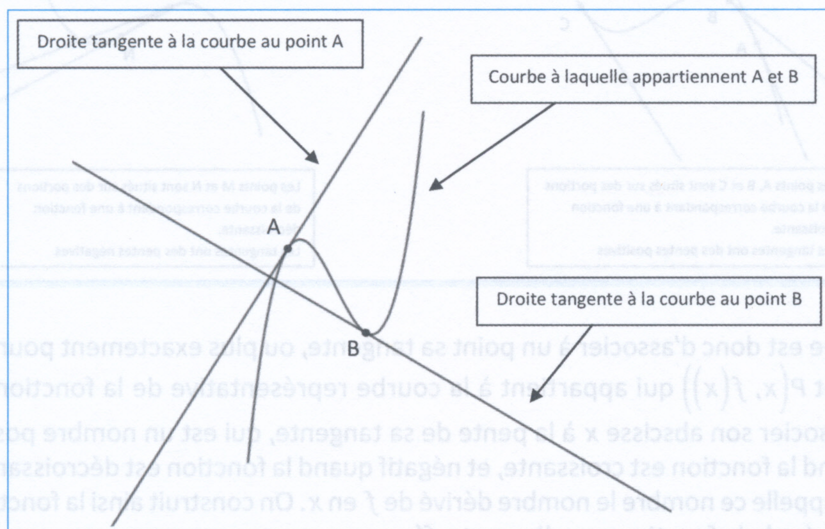
5. Fonction dérivée

L'exemple précédent est utile pour bien comprendre les notions de croissance et décroissance. En pratique, on n'utilise cette méthode que dans certains cas particuliers.

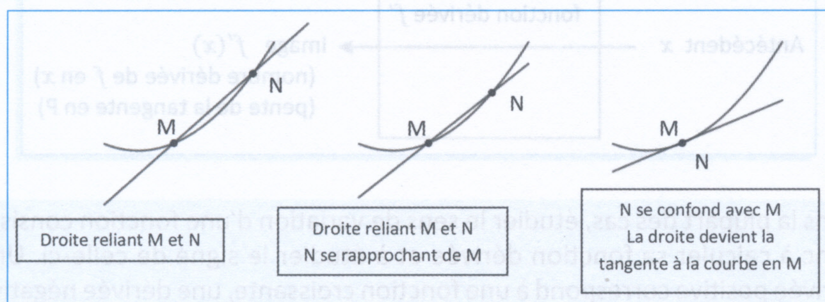
De manière plus courante, on étudie les variations d'une fonction au travers de sa fonction dérivée. Pour comprendre d'où vient cette notion, il faut en premier lieu s'intéresser au concept de droite tangente à une courbe en un point.

5.1. Tangente à une courbe et nombre dérivé

La tangente peut être vue de manière intuitive comme une droite « s'appuyant » sur la courbe au point considéré. Ainsi, dans la figure ci-dessous, sont figurées les tangentes en A et en B, deux points de la courbe.

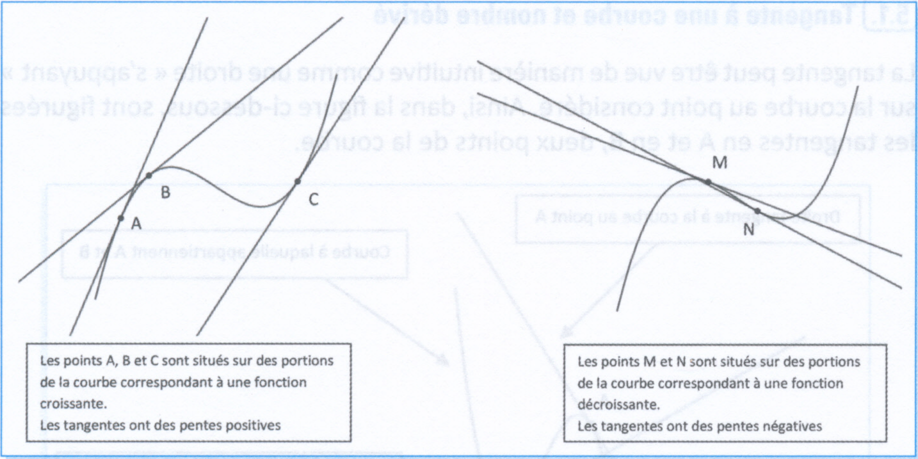


D'un point de vue mathématique, la tangente est la droite qu'on obtient « à la limite », lorsque l'on rapproche « à se toucher » deux points de la courbe. À titre d'illustration, le schéma ci-dessous montre un point M et un point N sur la courbe. Lorsque N se rapproche de M, la droite qui relie ces deux points se rapproche de la tangente. « A la limite », c'est-à-dire lorsque N se confond avec M, la droite est la tangente en M à la courbe.

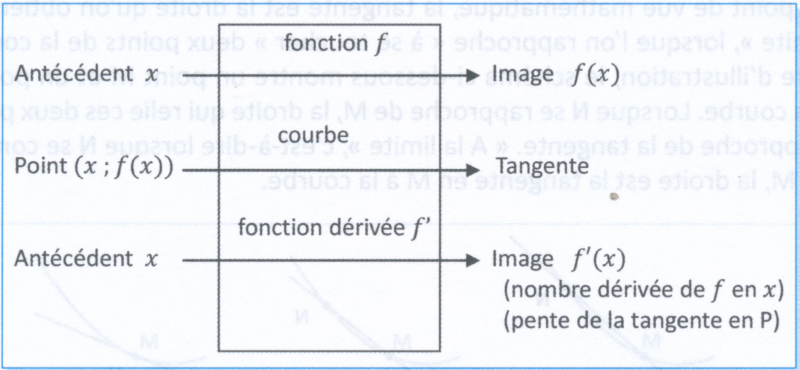


Quel est le lien entre la tangente et le sens de variation de la fonction ?

On voit sur la figure ci-dessous que lorsque la fonction est croissante, les tangentes sont des droites orientées vers le haut, c'est-à-dire qui ont des pentes positives. À l'inverse, lorsque la fonction est décroissante, les tangentes sont des droites orientées vers le bas, c'est-à-dire qui ont des pentes négatives.

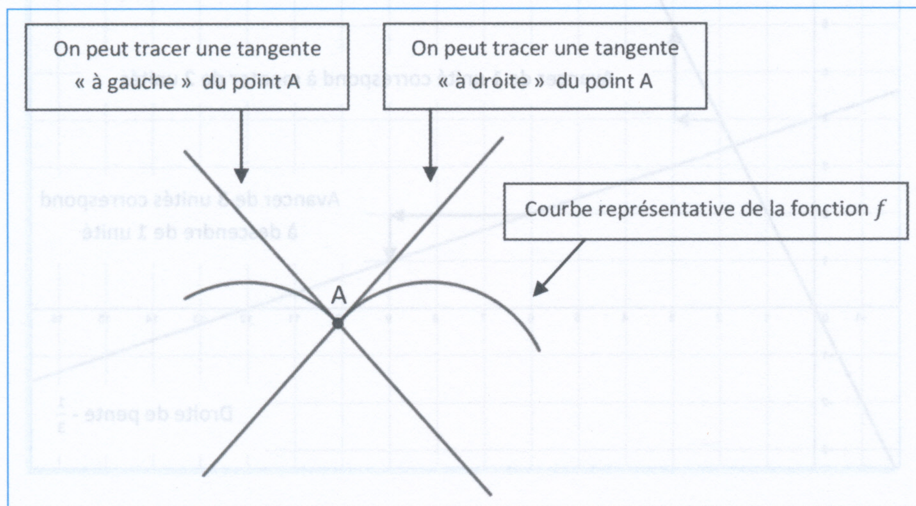


L'idée est donc d'associer à un point sa tangente, ou plus exactement pour un point $P(x, f(x))$ qui appartient à la courbe représentative de la fonction f, d'associer son abscisse x à la pente de sa tangente, qui est un nombre positif quand la fonction est croissante, et négatif quand la fonction est décroissante. On appelle ce nombre le nombre dérivé de f en x. On construit ainsi la fonction dérivée de la fonction, que l'on note f'.



Dans la plupart des cas, étudier le sens de variation d'une fonction consiste donc à calculer sa fonction dérivée et à étudier le signe de celle-ci. Une dérivée positive correspond à une fonction croissante, une dérivée négative correspond à une fonction décroissante.

À noter que le nombre dérivé n'existe pas toujours, comme l'illustre la figure ci-dessous.



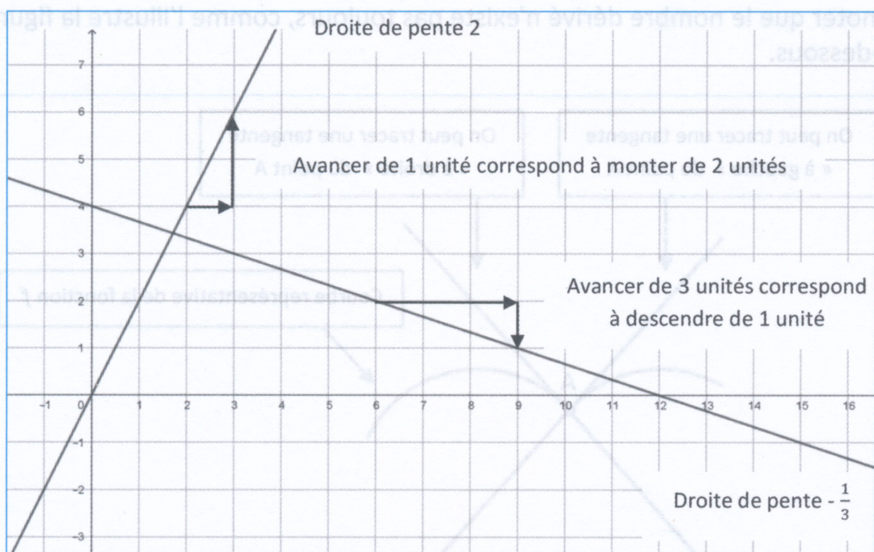
Si on considère le point A de coordonnées $\left(a\,;f\left(a\right)\right)$, on constate qu'il est impossible de tracer une tangente à la courbe en ce point. On peut en tracer une à droite et une à gauche. On les appelle des demi-tangentes. La fonction correspondante n'admet pas de nombre dérivé (n'est pas dérivable) en a, abscisse du point A.

5.2. Calcul du nombre dérivé

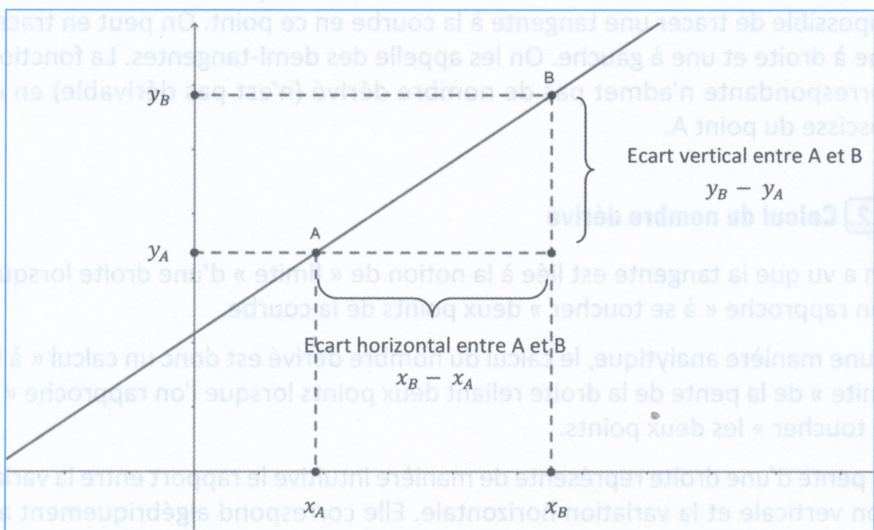
On a vu que la tangente est liée à la notion de « limite » d'une droite lorsque l'on rapproche « à se toucher » deux points de la courbe.

D'une manière analytique, le calcul du nombre dérivé est donc un calcul « à la limite » de la pente de la droite reliant deux points lorsque l'on rapproche « à se toucher » les deux points.

La pente d'une droite représente de manière intuitive le rapport entre la variation verticale et la variation horizontale. Elle correspond algébriquement au quotient $\dfrac{\text{Variation verticale}}{\text{Variation horizontale}}$. Comme l'illustre la figure ci-dessous, une pente de $2=\dfrac{2}{1}$ signifie que si l'on avance de 1 unité, on monte de 2 unités. Une pente de $-\dfrac{1}{3}$ signifie que si l'on avance de 3 unités on descend d'une unité.



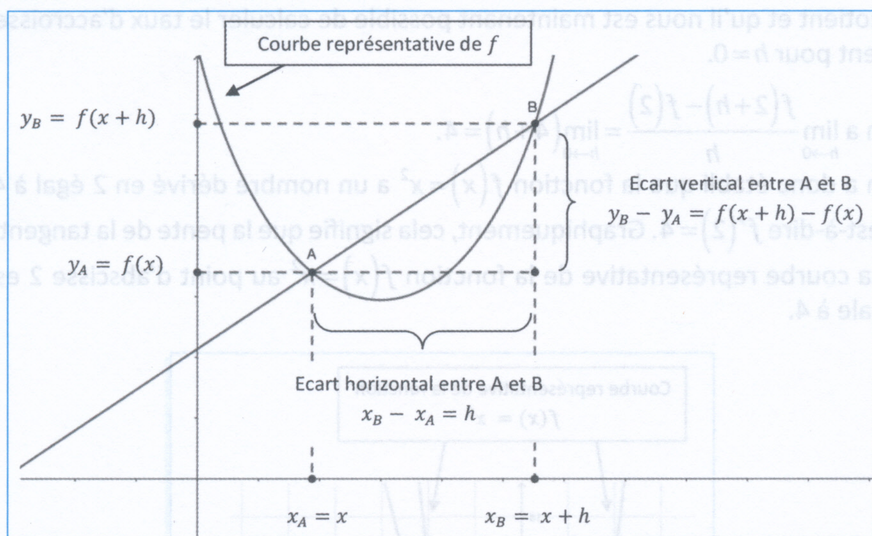
Intéressons-nous tout d'abord au calcul de la pente d'une droite dont on connaît deux points A et B, de coordonnées respectives $\left(x_A\,;y_A\right)$ et $\left(x_B\,;y_B\right)$.



D'après ce qui précède, la pente p de la droite vérifie $p = \dfrac{\text{Variation verticale}}{\text{Variation horizontale}}$, c'est-à-dire $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

On notera que l'ordre dans lequel on considère les points n'intervient pas dans ce calcul de pente puisque $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-\left(y_A - y_B\right)}{-\left(x_A - x_B\right)} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Revenons maintenant au calcul de la pente entre deux points situés sur la courbe représentative d'une fonction. Plus précisément, nous cherchons à calculer le nombre dérivé de f en un nombre x. Considérons comme points de la courbe $A\left(x\,;f\left(x\right)\right)$ et $B\left(x+h\,;f\left(x+h\right)\right)$, c'est-à-dire le point d'abscisse x et un point situé « près de A », d'abscisse $x+h$.



D'après ce qui précède, la pente de la droite reliant A et B est :

$p=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$. Ce quotient est appelé taux d'accroissement de la fonction f en x.

Le calcul du nombre dérivé en x consiste à faire se rapprocher A et B « à se toucher », c'est-à-dire à rendre le nombre h égal à zéro. Or, on voit que l'on ne peut pas directement utiliser la formule ci-dessus $\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ avec $h=0$, puisqu'il est impossible de diviser par 0. On cherche donc à calculer la valeur du taux d'accroissement quand h se rapproche de 0, c'est-à-dire ce que l'on appelle la limite de $\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ quand h tend vers zéro, et que l'on note $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$. Si cette limite est calculable, elle est le nombre dérivé de f en x, que l'on note $f'\left(x\right)$.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

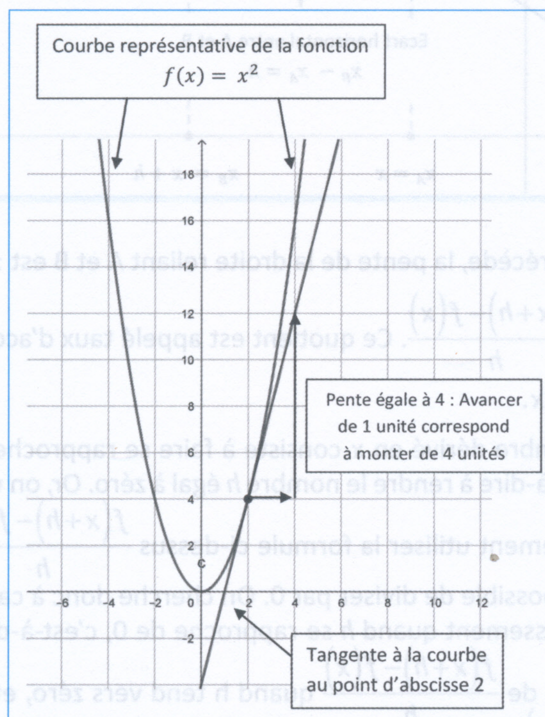
À titre d'illustration, nous allons calculer le nombre dérivé de la fonction $f(x)=x^2$ en $x=2$. On calcule le taux d'accroissement de f en 2 :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{2^2+4h+h^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h.$$

On constate que le calcul nous a permis d'éliminer h au dénominateur du quotient et qu'il nous est maintenant possible de calculer le taux d'accroissement pour $h=0$.

On a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$.

On a donc établi que la fonction $f(x)=x^2$ a un nombre dérivé en 2 égal à 4, c'est-à-dire $f'(2)=4$. Graphiquement, cela signifie que la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)=x^2$ au point d'abscisse 2 est égale à 4.



Le calcul que nous avons effectué pour $x=2$ reste inchangé quand x prend une valeur quelconque et le lecteur pourra constater que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

Nous pouvons ainsi établir que la fonction $f(x)=x^2$ admet un nombre dérivé en tout nombre réel x. On définit alors la fonction dérivée de f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par : $f'(x)=2x$.

5.3. Fonctions dérivées usuelles

En pratique, il est clair que l'on ne va pas à chaque fois calculer « à la main » la fonction dérivée.

Les dérivées de fonctions « classiques » sont donc supposées connues ainsi que certaines règles de calcul qui permettent de « combiner » des fonctions dérivées.

Le tableau ci-après donne les fonctions dérivées les plus classiques (on note D_f le domaine de définition de la fonction f et D'_f l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable, c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction dérivée f').

Fonction		Fonction dérivée		Remarque
D_f	Expression	D'_f	Expression	
$\mathbb{R}$	$f(x)=k$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	
$\mathbb{R}$	$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	
$\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$ où $n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ où $n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-n\dfrac{1}{x^{n+1}}$	
$[0;+\infty[$	$f(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	Non dérivable en 0

Note Le calcul de la dérivée de la fonction racine carrée sera fait au paragraphe 3.2 du chapitre 6 qui présente plus en détail cette fonction.

Les règles de calcul les plus courantes sur les fonctions dérivées sont les suivantes :

- Soit f une fonction dérivable sur D'_f et k un nombre réel, la fonction kf est dérivable sur D'_f et $(kf)'=kf'$.
  Pour tout x appartenant à D'_f, $(kf)'(x)=kf'(x)$.
  Exemple La dérivée de la fonction $g(x)=4x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $g'(x)=4\times 2x=8x$.

- Soient f et g deux fonctions dérivables sur D'.
  - Leur somme $f+g$ est dérivable sur D' et $\left(f+g\right)' = f'+g'$. Pour tout x appartenant à D'_f, $\left(f+g\right)'\left(x\right)=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)$.

    Exemple La dérivée de la fonction $h\left(x\right)=4x^2+3x$ sur $\mathbb{R}$ est $h'\left(x\right)=8x+3$.
  - Leur produit fg est dérivable sur D' et $\left(fg\right)'=f'g+fg'$. Pour tout x appartenant à D', $\left(fg\right)\left(x\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$. Ainsi, la dérivée de la fonction $h\left(x\right)=4x^2\left(\sqrt{x}+2\right)$ sur $\mathbb{R}$ est :

    $$h'\left(x\right)=8x\left(\sqrt{x}+2\right)+4x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}=8x\sqrt{x}+16x+2x\sqrt{x}=16x+10x\sqrt{x}.$$
- Si en outre, la fonction g ne s'annule pas, leur quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur D' et $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

  Pour tout x appartenant à D', $\left(\frac{f}{g}\right)'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{g\left(x\right)^2}$.

  Ainsi, la dérivée de la fonction $h\left(x\right)=\frac{3x+5}{x^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0]$ est :

  $$h'\left(x\right)=\frac{3x^2-\left(3x+5\right)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{3x^2-6x^2-10x}{x^4}=-\frac{3x+10}{x^3}.$$
- Soient f et g deux fonctions dérivables sur chacun de leur domaine de définition respectif D_f et D_g. Si la composition $g\,o\,f$ peut être définie, c'est-à-dire si l'ensemble des images de f est dans le domaine de définition de g, elle est dérivable sur D_f et $\left(gof\right)' = f'\left(g'of\right)$.

  Pour tout x appartenant à D_f, $\left(gof\right)'\left(x\right)=f'\left(x\right)\left(g'of\right)\left(x\right)=f'\left(x\right)g'\left(f\left(x\right)\right)$.

  Ainsi, la dérivée de la fonction $h\left(x\right)=\left(3x+5\right)^2$ sur $\mathbb{R}$, composée de $f\left(x\right)=3x+5$ et de $g\left(x\right)=x^2$, est : $h'\left(x\right)=3\times 2\left(3x+5\right)=18x+30$.

Note Dans ce cas précis, on peut retrouver ce résultat en développant l'expression de $h\left(x\right)=\left(3x+5\right)^2=9x^2+30x+25$, et en dérivant terme à terme cette expression.

En synthèse

$(kf)' = kf'$

$(f+g)' = f'+g'$

$(fg)' = f'g+fg'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$(fog)' = f'g'of$

La démonstration de toutes ces formules pourrait paraître fastidieuse. À titre d'illustration, nous allons démontrer uniquement celle du produit. On revient pour cela à la définition du nombre dérivé et donc au taux d'accroissement T.

$$T = \frac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.$$

$$T = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)\,g(x+h)+f(x)\,g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

(on ajoute et retranche au numérateur le terme $f(x)\,g(x+h)$).

$$T = \frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x+h)+f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}.$$

$$T = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Lorsque l'on fait tendre h vers 0, on obtient :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x+0) = g(x)$ et

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$, soit au final :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{fg(x+h)-fg(x)}{h} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

On a bien montré que (fg) est dérivable en x et que :

$$(fg)'(x) = (f'g+fg')(x).$$

5.4. Application à l'étude des variations d'une fonction

Comme présenté dans les paragraphes précédents, la fonction dérivée est utile pour étudier les variations d'une fonction.

À titre d'illustration, considérons la fonction $f(x) = x^3-2x^2+1$, définie sur l'intervalle [–1 ; 2]. D'après le paragraphe précédent, la fonction f admet comme dérivée sur l'intervalle considéré la fonction $f'(x) = 3x^2-4x$.

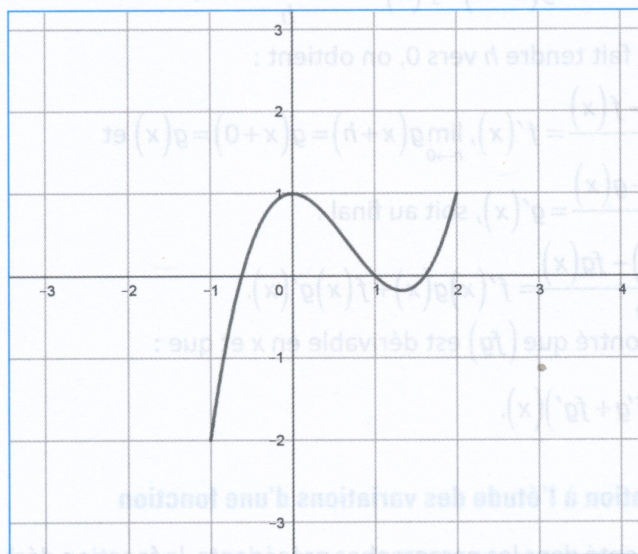
En factorisant cette expression, on obtient $f'(x)=3x\left(x-\frac{4}{3}\right)$. On en déduit le signe de la fonction f' (revoir si besoin le paragraphe 4.2. du chapitre 4) :

x	-1		0		$\frac{4}{3}$		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction f :

x	-1		0		$\frac{4}{3}$		2
Variations de $f(x)$	-2	↗	1	↘	$\frac{-5}{27}$	↗	1

La représentation graphique de la fonction f illustre ce résultat :



6. Notion de limite

6.1. Qu'est ce qu'une limite ?

La notion de limite est au cœur du domaine des mathématiques que l'on appelle l'analyse. L'algèbre définit des règles de calcul pour les nombres. Comme on l'a vu dans le cas du calcul du nombre dérivé, il est parfois nécessaire d'étudier ce qu'il se passe « à la limite », c'est-à-dire quel résultat peut donner un calcul lorsque l'on se situe aux frontières des règles établies par l'algèbre. Ainsi, dans le cas du nombre dérivé, on a eu besoin de calculer un quotient que l'algèbre ne permettait pas directement d'obtenir puisqu'il s'agissait de diviser par 0. On va s'intéresser ici à l'infiniment grand ou à l'infiniment petit. Dans le contexte de ce chapitre, on entend par infiniment grand un nombre dont la valeur absolue est « infiniment grande » et par infiniment petit un nombre dont la valeur absolue se rapproche de 0 « à le toucher ». Par exemple -10^{100} est un nombre négatif dont la valeur absolue est très grande. 10^{100} est un nombre positif dont la valeur absolue est très grande. $\frac{1}{10^{100}}=10^{-100}$ est un nombre très petit.

Si $E(x)$ désigne une expression algébrique d'une variable réelle x, on va donc s'intéresser au résultat de $E(x)$ « à la limite ». En termes de notation, nous utiliserons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)$ (lire « limite de $E(x)$ quand x tend vers plus l'infini »), résultat éventuel du calcul pour un nombre positif infiniment grand. Par exemple, si on considère le quotient $\frac{1}{x}$, il n'est jamais nul puisque le chiffre 1 divisé par un nombre ne donnera jamais 0. Néanmoins, plus on divise par un nombre qui est grand, plus le résultat est petit et se rapproche de 0. « À la limite », c'est-à-dire si on pouvait diviser par un nombre « infiniment grand » on trouverait un résultat nul. On écrit donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} E(x)$ (lire « limite de $E(x)$ quand x tend vers moins l'infini »), résultat éventuel du calcul pour un nombre négatif dont la valeur absolue est infiniment grande. De même que précédemment, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to a} E(x)$ (lire « limite de $E(x)$ quand x tend vers a »), résultat éventuel du calcul pour un nombre qui se rapproche de a « à le toucher ». Par exemple on a vu que le nombre dérivé vérifiait $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Note Au sujet de cette dernière notation, nous avons énoncé ci-dessus que nous nous intéressons aux nombres infiniment petits. Cela ne veut pas nécessairement dire que l'on fait tendre la variable x intervenant dans le calcul vers 0. Si l'on prend par exemple le cas de l'expression $E(x)=\frac{1}{x-3}$ le problème se pose pour $x=3$ puisqu'alors $x-3=0$ et on s'intéressera donc à $\lim_{x\to 3} E(x)$ car $x-3$ devient infiniment petit quand x se rapproche de 3.

Remarquons également que l'on sera amené à distinguer parfois la manière dont le nombre se rapproche de a. En effet, le résultat d'un calcul de limite peut varier suivant que x tend vers a en étant plus grand ou au contraire plus petit que a. À titre d'illustration, les nombres 3,1 ; 3, 01 ; 3, 001 ; 3, 0001 se rapprochent de 3 en étant plus grands que 3, alors que 2,9 ; 2,99 ; 2,999 ; 2,9999 se rapprochent de 3 en étant plus petits. On note alors :

$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} E(x)$ ou bien $\lim_{x\to a+} E(x)$, quand x se rapproche de a en étant supérieur à a.

$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} E(x)$ ou bien $\lim_{x\to a-} E(x)$, quand x se rapproche de a en étant inférieur à a.

Un exemple de calcul rendant nécessaire cette distinction sera donné au paragraphe suivant.

La notion de limite s'applique en particulier aux fonctions.

6.2. Que peut valoir une limite ?

Il convient de distinguer 3 cas.

- 1er cas : la limite existe et est un nombre réel.

  On a calculé précédemment le nombre dérivé de la fonction x^2 en 2. On a alors établi $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$. D'autre part, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Si on note l la limite en question, on dit que « $E(x)$ tend vers l quand x tend vers... » (« moins l'infini », « plus l'infini » ou « a », suivant les notations utilisées au paragraphe précédent).

- 2e cas : la limite est infinie.

  Considérons la fonction $f(x)=x$. Lorsque x « tend vers plus l'infini », $f(x)$ qui lui est égal tend également vers plus l'infini. On note $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$. De même, quand x « tend vers moins l'infini », on obtient $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$.

Considérons maintenant le quotient du paragraphe précédent $\frac{1}{x-3}$. Lorsque x se rapproche de plus en plus de 3, le numérateur 1 est divisé par un nombre de plus en plus petit et le quotient devient donc de plus en plus grand.

Par exemple :

- pour $= 3{,}1$, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0{,}1} = 10$.
- pour $= 3{,}000001$, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0{,}000001} = 1\,000\,000$.

Mais si x se rapproche de 3 en étant plus petit que 3, le quotient est un nombre négatif, dont la valeur absolue devient de plus en plus grande.

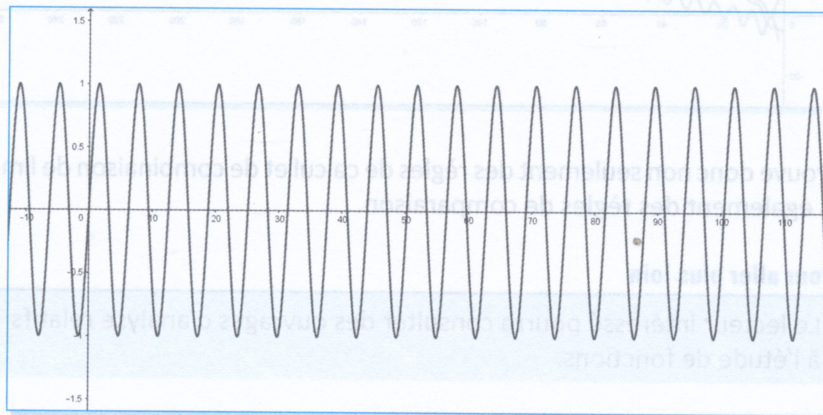
Par exemple :

- pour $= 2{,}9$, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{-0{,}1} = -10$.
- pour $= 2{,}999999$, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{-0{,}000001} = -1\,000\,000$.

On est ainsi amené à distinguer la manière dont x se rapproche de 3 et on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} E(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} E(x) = -\infty$

- 3[e] cas : la limite n'existe pas.

Considérons le graphique ci-dessous :



Il s'agit de la représentation de la fonction $sin(x)$ (lire « sinus x »). Les valeurs de cette fonction évoluent entre -1 et 1. Lorsque x tend vers l'infini, les images $sin(x)$ parcourent en permanence l'intervalle $[-1\,;+1]$. La fonction sinus n'a donc pas de limite en plus l'infini : Elle ne tend pas vers un nombre particulier et elle ne tend pas non plus vers l'infini.

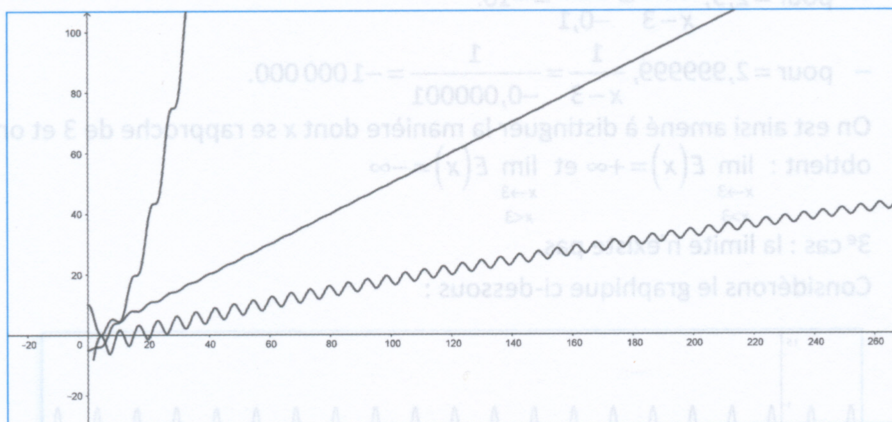
On notera au passage une petite remarque Contrairement au langage courant « pas de limite » en mathématiques ne signifie donc pas qu'un nombre grandit à l'infini.

6.3. Calcul et étude de limites

Au-delà des quelques exemples présentés, nous ne nous étendrons pas sur les différentes règles de calcul de limites car le sujet nous paraît un peu trop étendu et complexe pour être abordé dans cet ouvrage.

Nous nous bornerons à mentionner qu'il est non seulement intéressant de connaître les limites vers lesquelles tendent des fonctions mais peut-être plus encore la manière dont elles tendent vers ces limites.

À titre d'illustration, le graphique ci-dessous illustre trois cas de fonctions qui tendent vers plus l'infini en plus l'infini de manière différente.



On trouve donc non seulement des règles de calcul et de combinaison de limites mais également des règles de comparaison.

Pour aller plus loin

Le lecteur intéressé pourra consulter des ouvrages d'analyse relatifs à l'étude de fonctions.

Chapitre 6

Quelques fonctions classiques

1. Fonction affine

1.1. Définition

Une fonction affine f est définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et a pour expression générique $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels quelconques.

Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = -5x + 6$,

$g(x) = 2x - \sqrt{2}$ ou $h(x) = 14$ sont des fonctions affines.

a est appelé coefficient directeur, b est appelée ordonnée à l'origine. Ces appellations prendront tout leur sens lorsque nous considérerons la représentation graphique au paragraphe 1.3.

1.2. Variation

Le tableau de variation dépend du signe du coefficient a.

On a démontré dans le paragraphe 4 du chapitre 5 que la fonction affine définie par $f(x) = -2x + 3$ était strictement décroissante. De la même manière, on peut démontrer que, plus généralement, si a est négatif, la fonction est strictement décroissante et que si a est positif, la fonction est strictement croissante.

Dans le cas où a est nul, on obtient $f(x)=b$, c'est-à-dire une fonction constante égale à b quelle que soit la valeur de x.

On retrouve ce résultat de manière plus directe en considérant le signe de la dérivée de la fonction affine $f'(x)=a$.

D'autre part :

- Pour $a>0$, $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$.
- Pour $a<0$, $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)=-\infty$.

Les différents tableaux de variation d'une fonction affine sont donc :

Pour $a>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Pour $a<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

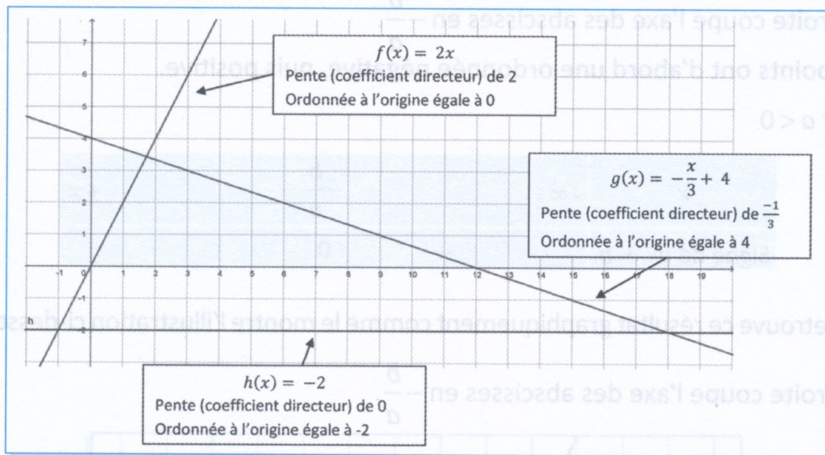
Pour $a=0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	b →	b

1.3. Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite. Cette droite a pour pente a, ce qui justifie l'appellation de coefficient directeur vue plus haut. D'autre part, l'image de 0 par la fonction f est $f(0)=a\times 0+b=b$. Le point $(0\,;b)$ appartient donc à la droite, ce qui explique que le nombre b soit appelé ordonnée à l'origine.

À titre d'illustration, reprenons les droites du paragraphe 5.2 du chapitre 5.



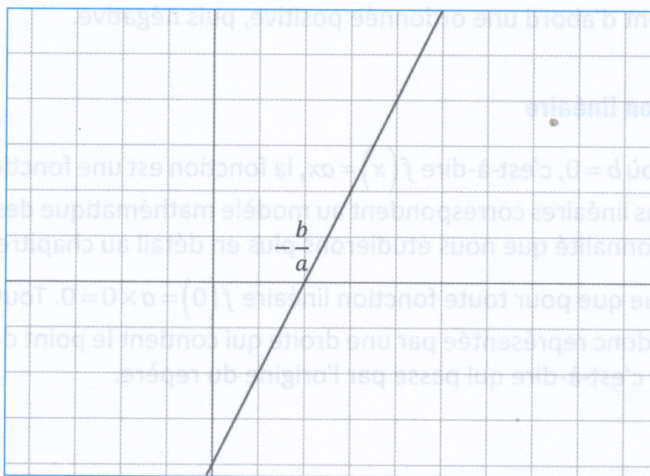
1.4. Lien avec les équations et inéquations du 1er degré

Au paragraphe 3.2.2. du chapitre 4, on a introduit le tableau de signe de l'expression $ax+b$ dans le cas où le coefficient a n'est pas nul.

Pour $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

On retrouve ce résultat graphiquement comme le montre l'illustration ci-dessous.



La droite coupe l'axe des abscisses en $-\frac{b}{a}$.

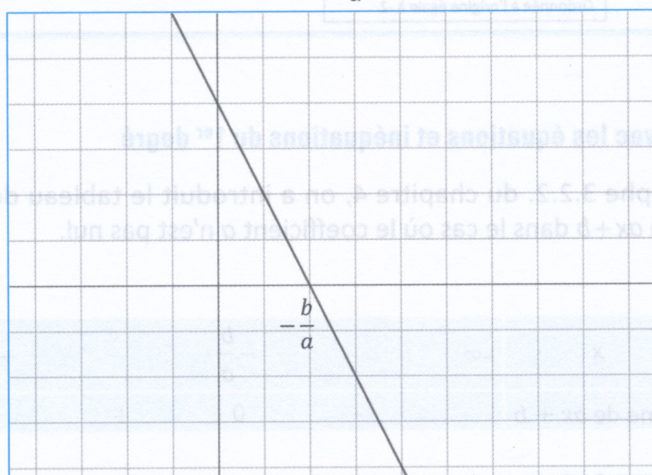
Les points ont d'abord une ordonnée négative, puis positive.

Pour $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

On retrouve ce résultat graphiquement comme le montre l'illustration ci-dessous.

La droite coupe l'axe des abscisses en $-\frac{b}{a}$.



Les points ont d'abord une ordonnée positive, puis négative.

1.5. Fonction linéaire

Dans le cas où $b=0$, c'est-à-dire $f(x)=ax$, la fonction est une fonction linéaire. Les fonctions linéaires correspondent au modèle mathématique des situations de proportionnalité que nous étudierons plus en détail au chapitre 8.

On remarque que pour toute fonction linéaire $f(0)=a\times 0=0$. Toute fonction linéaire est donc représentée par une droite qui contient le point de coordonnées (0 ; 0), c'est-à-dire qui passe par l'origine du repère.

2. Fonction du second degré

2.1. Définition

Une fonction du second degré, est définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est a pour expression générique $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, a étant différent de 0 (si $a = 0$, f est alors une fonction affine).

Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = 2x^2 + 6x + 6$, $g(x) = -4x^2 + 40x - 96$ ou $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$ sont des fonctions du second degré.

2.2. Variation

D'après les chapitres précédents, on a les deux résultats suivants :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ admet comme dérivée $f'(x) = 2ax + b$. On en déduit, par l'étude du signe de $f'(x)$, les variations de la fonction.

D'autre part, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x) = \pm\infty$ (« + » si $a > 0$ et « − » si $a < 0$).

On peut donc dresser le tableau de variation de la fonction f, en fonction du signe du coefficient a :

Pour $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	$+\infty$

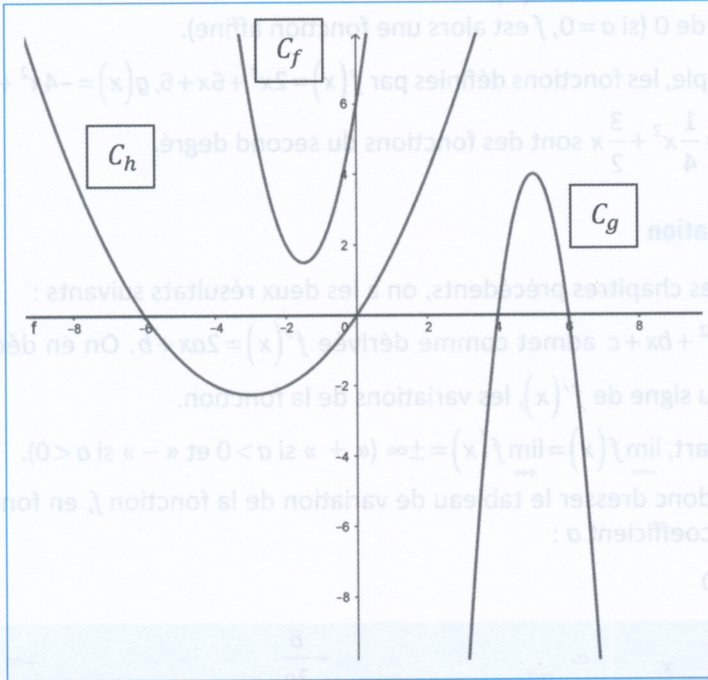
Pour $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	$-\infty$

2.3. Courbe représentative

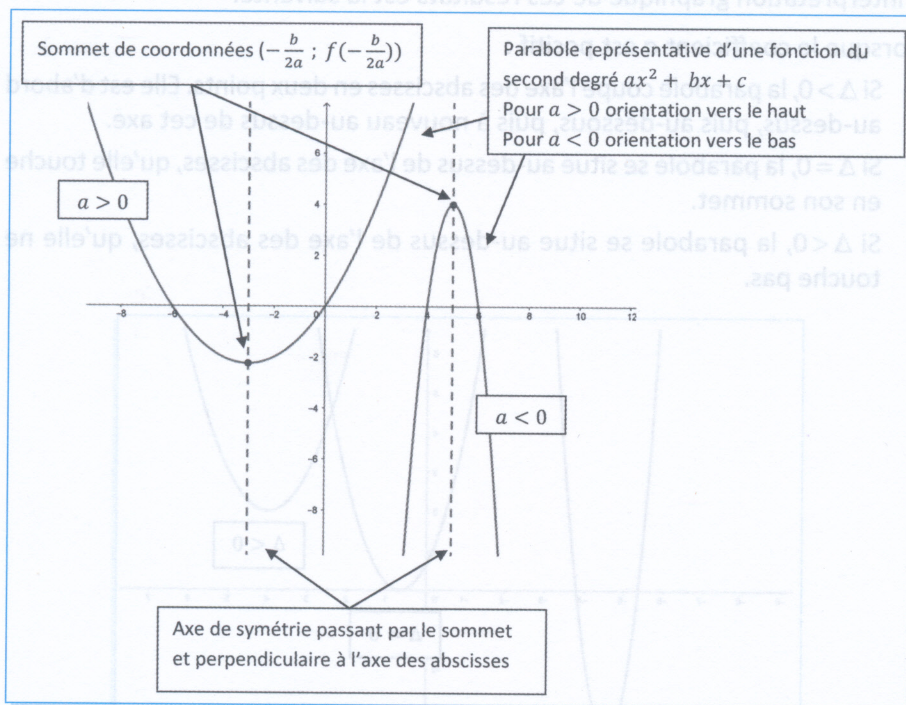
La courbe représentative d'une fonction du second degré est une parabole.

À titre d'illustration, les trois fonctions *f*, *g* et *h* définies ci-dessus au paragraphe 2.1 ont respectivement pour courbes représentatives les trois paraboles C_f ; C_g et C_h ci-dessous.



Les paraboles ont les caractéristiques suivantes :

- Elles sont « orientées vers le haut » lorsque le coefficient *a* est positif et « orientées vers le bas » lorsqu'il est négatif.
- Elles admettent un point extrême, appelé sommet dont les coordonnées sont données par le tableau de variation vu ci-dessus.
- Elles possèdent un axe de symétrie passant par le sommet et perpendiculaire à l'axe des abscisses.



2.4. Lien avec les équations et inéquations du 2nd degré

Au paragraphe 4.2. du chapitre 4, on a introduit le tableau du trinôme ax^2+bx+c dans le cas où le coefficient a n'est pas nul.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ le trinôme a deux racines, x_1 et x_2, et on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a	

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, Le trinôme a une racine unique x_0 et on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

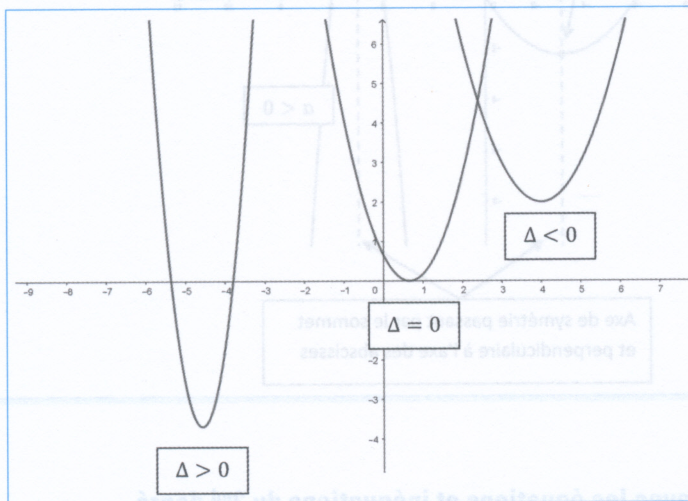
Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il n'existe pas de racine et le signe du trinôme est constant, du signe du coefficient de x^2.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	

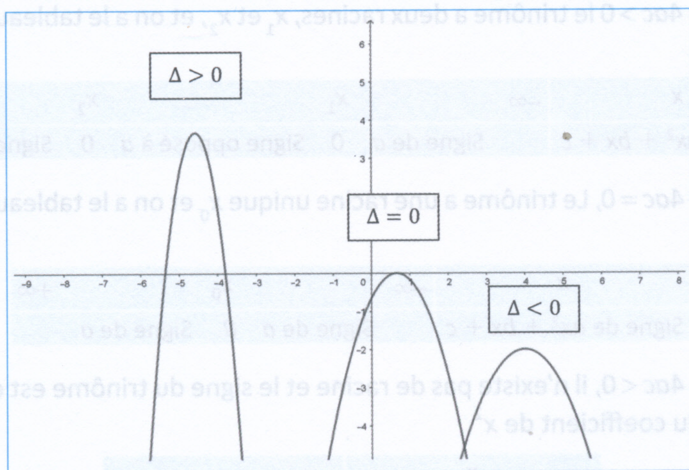
L'interprétation graphique de ces résultats est la suivante.

Lorsque le coefficient *a* est positif :

- Si $\Delta > 0$, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points. Elle est d'abord au-dessus, puis au-dessous, puis à nouveau au-dessus de cet axe.
- Si $\Delta = 0$, la parabole se situe au-dessus de l'axe des abscisses, qu'elle touche en son sommet.
- Si $\Delta < 0$, la parabole se situe au-dessus de l'axe des abscisses, qu'elle ne touche pas.



Lorsque le coefficient *a* est négatif, on observe des résultats similaires, avec un positionnement inversé par rapport à l'axe des abscisses.



3. La fonction racine carrée

3.1. Définition

On a vu au paragraphe 4.1.1. du chapitre 4 que la racine carrée d'un nombre a est le nombre positif que l'on note $\sqrt{a}$ et qui vérifie $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Puisqu'un carré ne peut être que positif, on déduit de l'égalité précédente que a est positif et donc que si a est négatif, sa racine carrée n'existe pas.

La fonction racine carrée est la fonction qui associe à tout nombre sa racine carrée. D'après ce qui précède, elle n'a de sens que pour les nombres positifs. Son domaine de définition est donc $\left[0\,;+\infty\right[$.

3.2. Variation

On a vu au paragraphe 5.3 du chapitre 5 que la fonction racine carrée admet comme fonction dérivée la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Étant donné que, par définition, une racine carrée est toujours positive, on a $f'(x) > 0$, pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ et la fonction racine carrée et donc strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

D'autre part, $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Le tableau de variation de la fonction racine carrée est donc :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

Nous allons ici effectuer le calcul de la fonction dérivée de la fonction racine carrée et nous intéresser en particulier à ce qu'il se passe pour $x = 0$.

Considérons tout d'abord $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. On calcule le taux d'accroissement $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

Note Puisque le calcul du nombre dérivé consiste à calculer la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0, il n'est pas restrictif de considérer h très proche de 0. On suppose donc h assez « petit » pour assurer $x + h > 0$. Ce dernier point garantit l'existence du terme $\sqrt{x+h}$ et donc que le calcul du taux d'accroissement a un sens.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

(on multiplie « en haut et en bas » par le nombre $\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)$ qui ne peut pas être nul car $\sqrt{x+h}>0$ et $\sqrt{x}>0$).

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

(on applique l'identité remarquable $\left(a-b\right)\left(a+b\right)=a^2-b^2$

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

(on simplifie par h).

On a donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+0}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On a bien établi la formule de la dérivée de la fonction racine carrée sur $]0\,;+\infty[$.

Pour $x=0$, le taux d'accroissement est $\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}$.

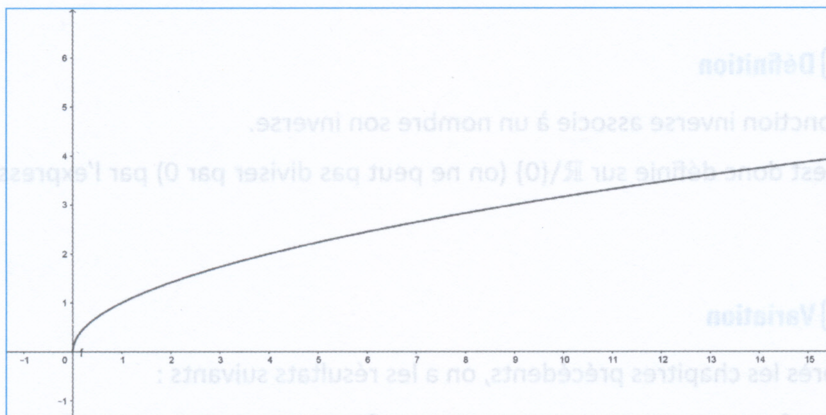
On remarque que ce calcul n'a de sens que si h est strictement positif. En effet, dans le cas contraire $\sqrt{h}$ n'existe pas. En d'autres termes, on ne peut pas se « rapprocher de la valeur $\sqrt{0}$ » en considérant la racine carrée de nombres inférieurs à 0. Calculer le nombre dérivé de la fonction racine carrée en 0 revient donc à calculer $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0}}\frac{\sqrt{h}}{h}$.

$$\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{h}}=\frac{1}{\sqrt{h}}.$$

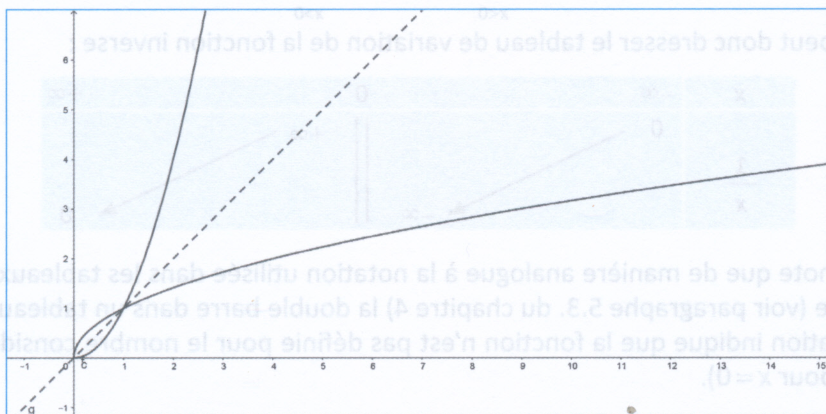
Donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0}}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0}}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$. (on divise 1 par un nombre positif qui se rapproche de 0, le résultat tend vers $+\infty$).

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0. L'interprétation géométrique du calcul précédent est que la tangente au point d'abscisse 0 à une « pente infinie », c'est-à-dire qu'elle est verticale.

3.3. Courbe représentative



Il est intéressant de comparer les courbes de la fonction racine carrée et de la fonction carré (qui à un nombre x fait correspondre son carré x^2) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, cette dernière nous donne un arc de parabole.



On remarque que les deux courbes sont symétriques par rapport à la diagonale. On observe également que la courbe de la racine carrée est au-dessus de celle du carré sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, puis au-dessous, ce qui se traduit algébriquement par :

$\sqrt{x} > x > x^2$ pour $x \in \left]0;1\right[$;

pour $x = 1$, $\sqrt{1} = 1 = 1^2$; pour x = 0, $\sqrt{0} = 0 = 0^2$

$\sqrt{x} < x < x^2$ pour $\in \left]1\,;+\infty\right[$.

4. Fonction inverse

4.1. Définition

La fonction inverse associe à un nombre son inverse.

Elle est donc définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (on ne peut pas diviser par 0) par l'expression $\frac{1}{x}$.

4.2. Variation

D'après les chapitres précédents, on a les résultats suivants :

$f(x)=\frac{1}{x}$ admet comme dérivée $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, qui est toujours de signe négatif.

On en déduit que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

D'autre part, $\lim\limits_{-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$.

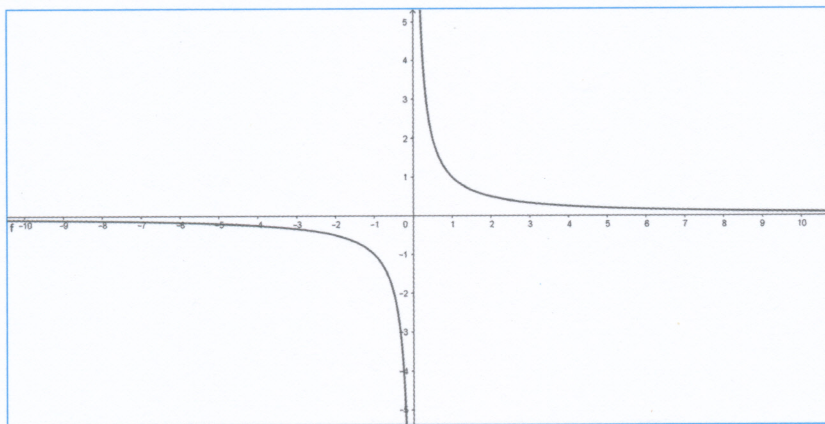
On peut donc dresser le tableau de variation de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

On note que de manière analogue à la notation utilisée dans les tableaux de signe (voir paragraphe 5.3. du chapitre 4) la double barre dans un tableau de variation indique que la fonction n'est pas définie pour le nombre considéré (ici pour $x=0$).

4.3. Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.



La représentation graphique de la fonction inverse a les caractéristiques suivantes :

- Elle admet deux asymptotes verticales, c'est-à-dire que la courbe « suit » une droite verticale, en l'occurrence l'axe des ordonnées. Cette situation se produit lorsque « x tend vers 0 par valeurs négatives ou positives ».
- Elle admet deux asymptotes horizontales, c'est-à-dire que la courbe « suit » une droite horizontale, en l'occurrence l'axe des abscisses. Cette situation se produit lorsque « x tend vers + ou – l'infini ».
- Elle a comme centre de symétrie l'origine du repère, c'est-à-dire le point de coordonnées (0 ; 0).

Chapitre 7

Suites numériques

1. Généralités

Comme son nom l'indique, une suite numérique est une suite de nombres. Le terme « suite » signifie que l'on est capable de dénombrer ces nombres. On peut identifier le 1er nombre, le 2e, et ainsi de suite, jusqu'au dernier ou bien jusqu'à l'infini si la suite ne s'arrête pas.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est une suite infinie. Le 1er terme est « 0 », le deuxième « 1 », etc. En revanche l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ne constitue pas une suite numérique car on ne peut pas dénombrer les réels.

Dans la vie courante, la notion de suite est omniprésente. Ainsi les années de notre calendrier grégorien apparaissent comme une combinaison de deux suites infinies de nombres, les années avant Jésus Christ et celles après J.-C. (concernant la nature infinie de la suite des années avant J.-C. nous nous abstiendrons d'ouvrir le débat sur une date de début de l'univers). Le tableau des mensualités de remboursement d'un prêt bancaire constitue une suite finie de nombres.

1.1. Notations

Une suite est représentée par une lettre, par exemple u. Puisque l'on peut dénombrer les termes d'une suite et leur attribuer un rang, la notation mathématique va utiliser un index. Le terme u_0 va désigner le terme de rang ou d'indice 0. Le terme générique u_n désigne le terme de rang n de la suite u également notée (u_n). En cas de doute sur la plage couverte par l'indice, on peut

préciser celle-ci, par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de terme générique u_n dont le rang parcourt l'ensemble des entiers naturels, tandis que $(u_n)_{n\geq 2}$ désigne la même suite à laquelle on a retiré les termes u_0 et u_1 puisque l'on ne considère que les rangs à partir de 2.

1.2. Modes de définition

On rencontre deux manières de définir une suite (u_n).

La première utilise une fonction f et définit le terme $u_n = f(n)$ comme l'image de son rang. Cette définition est dite explicite. Elle permet de calculer directement un terme lorsque l'on connaît son rang. Par exemple, si on s'intéresse à la suite des carrés des nombres entiers, $u_n = n^2$ et on obtient $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{247} = 247^2 = 61\,009$.

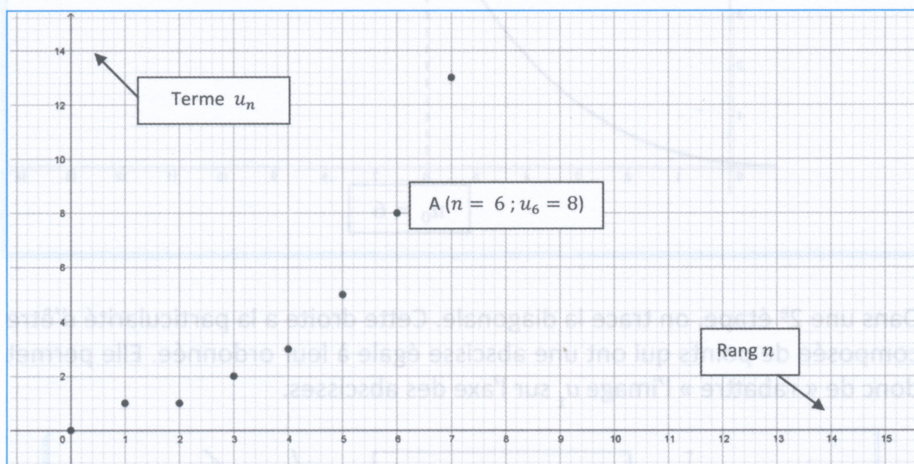
La deuxième méthode consiste à calculer un terme grâce aux termes précédents. Par exemple la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ indique que l'on ajoute 2 au terme de rang n pour obtenir le terme suivant de rang $n+1$. On dit que l'on définit cette suite par une relation de récurrence, c'est une suite récurrente. Dans ce mode de définition, et contrairement à une définition explicite, il est nécessaire d'indiquer la valeur de début de la suite. Par exemple, dans notre cas, si le 1er terme u_0 est égal à 0, la suite de nombres est 0, 2, 4, 6..., c'est-à-dire la suite des nombres pairs. Mais si le 1er terme u_0 est 1, cette suite devient 1, 3, 5, 7..., c'est-à-dire la suite des nombres impairs. On indique également en cas de doute à partir de quel rang la relation de récurrence s'applique. Dans notre cas, la relation $u_{n+1} = u_n + 2$ s'applique pour $n \geq 0$. Il faut noter que l'on peut utiliser les indices d'une manière différente et définir cette même suite de nombres impairs par $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + 2$ pour $n \geq 1$. En effet, on ajoute toujours 2 au terme d'indice précédent mais on commence la relation uniquement à partir de 1 car le terme u_{n-1} n'a pas de signification pour $n = 0$.
Une suite récurrente très célèbre est celle de Fibonacci (du nom du mathématicien italien du Moyen Âge Léonardo Fibonacci). Elle est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$ (ou bien $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour ≥ 0).

On notera que, puisque la relation de récurrence lie trois termes consécutifs, on a besoin de donner la valeur de u_0 et également celle de u_1 pour définir la suite. Les premiers termes de la suite de Fibonacci sont : $u_0 = 0, u_1 = 1$, $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2, u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$.

À noter que les définitions explicites et par récurrence ne sont pas exclusives l'une de l'autre. La suite des nombres pairs définie par récurrence ci-dessus ($u_0 = 0$ et $u_n = u_{n-1} + 2$ pour $n \geq 1$) peut également être définie de manière explicite par $u_n = 2n$ pour $n \geq 0$.

1.3. Représentation graphique

De manière analogue à une fonction, une suite peut être représentée graphiquement. On indique le rang sur l'axe des abscisses et le terme correspondant sur l'axe des ordonnées. En d'autres termes, la représentation graphique d'une suite (u_n) est constituée des points de coordonnées (n, u_n).

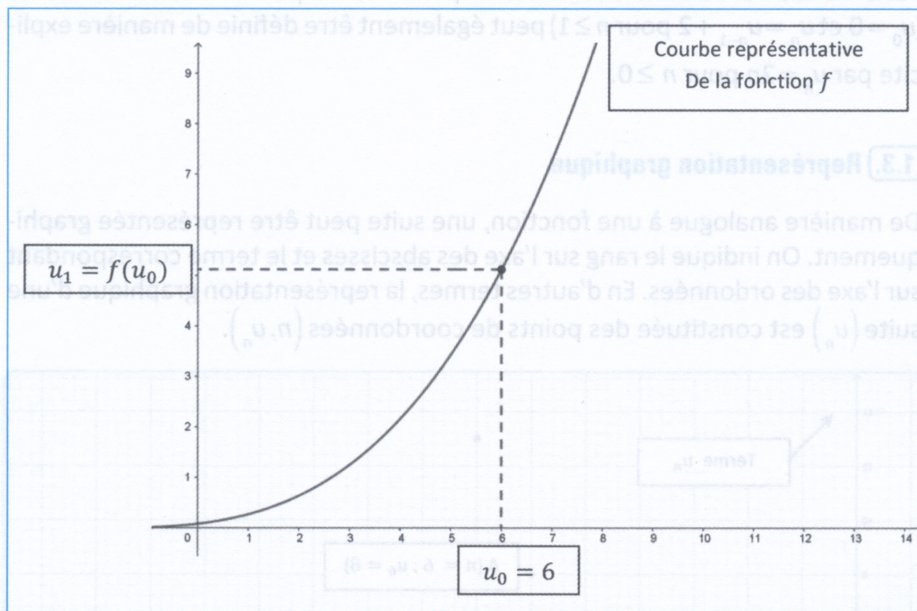


Représentation graphique de la suite de Fibonacci.

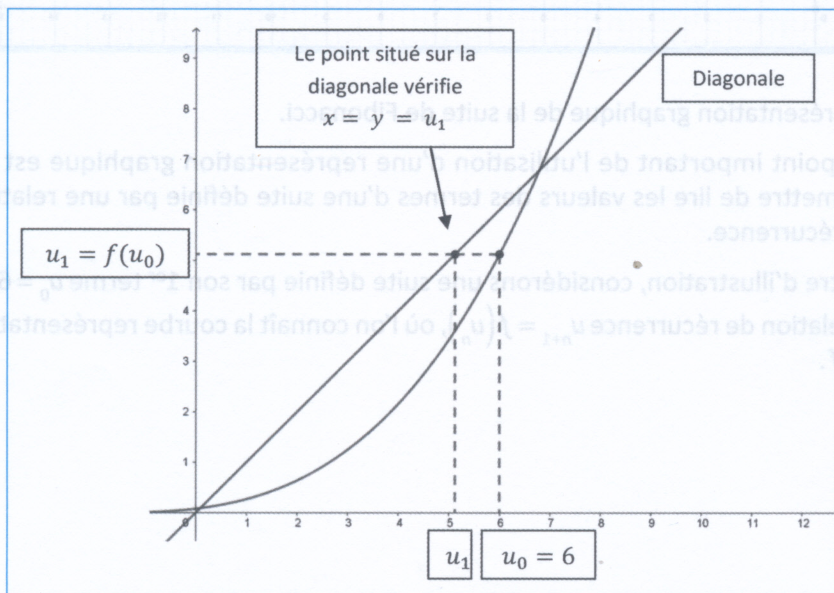
Un point important de l'utilisation d'une représentation graphique est de permettre de lire les valeurs des termes d'une suite définie par une relation de récurrence.

À titre d'illustration, considérons une suite définie par son 1er terme $u_0 = 6$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où l'on connaît la courbe représentative de f.

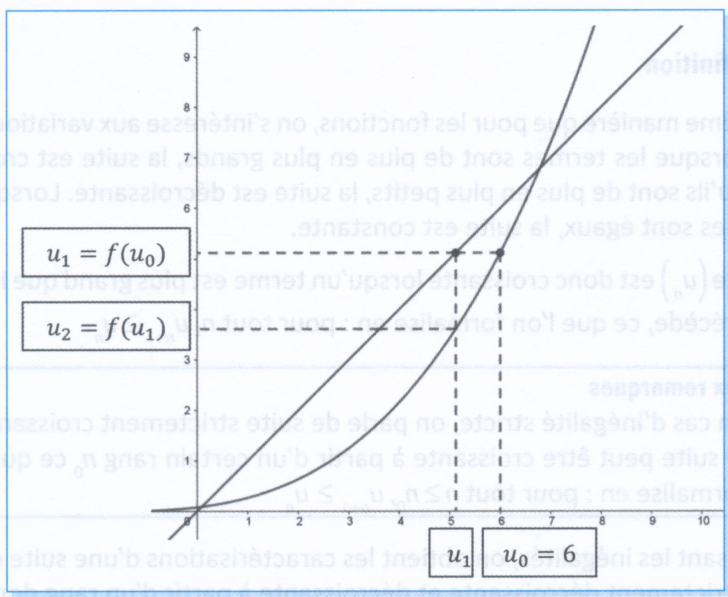
Dans une première étape, on peut lire le terme u_1 en tant qu'image de $u_0 = 6$.



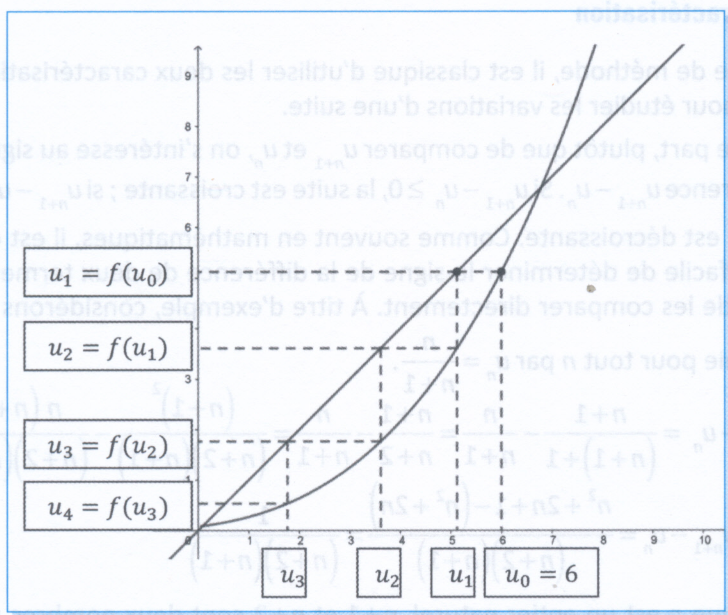
Dans une 2[e] étape, on trace la diagonale. Cette droite a la particularité d'être composée de points qui ont une abscisse égale à leur ordonnée. Elle permet donc de « rabattre » l'image u_1 sur l'axe des abscisses.



On peut alors lire le terme u_2 en tant qu'image de u_1.



On répète alors le procédé, en se servant de la diagonale pour rabattre les ordonnées sur l'axe des abscisses et ainsi lire graphiquement de proche en proche les termes de la suite récurrente.



2. Variation

2.1. Définition

De la même manière que pour les fonctions, on s'intéresse aux variations d'une suite. Lorsque les termes sont de plus en plus grands, la suite est croissante et lorsqu'ils sont de plus en plus petits, la suite est décroissante. Lorsque tous les termes sont égaux, la suite est constante.

Une suite $\left(u_n\right)$ est donc croissante lorsqu'un terme est plus grand que le terme qui le précède, ce que l'on formalise en : pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$.

Deux remarques

- en cas d'inégalité stricte, on parle de suite strictement croissante,
- la suite peut être croissante à partir d'un certain rang n_0 ce qui se formalise en : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$

En inversant les inégalités, on obtient les caractérisations d'une suite décroissante, strictement décroissante et décroissante à partir d'un rang donné.

Exemple La suite définie par $u_n = 3n+2$ est strictement croissante.
En effet : $u_{n+1} = 3\left(n+1\right)+2 = 3n+3+2 = u_n + 3 > u_n$.

2.2. Caractérisation

En terme de méthode, il est classique d'utiliser les deux caractérisations suivantes pour étudier les variations d'une suite.

- D'une part, plutôt que de comparer u_{n+1} et u_n, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite est croissante ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est décroissante. Comme souvent en mathématiques, il est en effet plus facile de déterminer le signe de la différence de deux termes plutôt que de les comparer directement. À titre d'exemple, considérons la suite définie pour tout n par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{\left(n+1\right)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{\left(n+1\right)^2}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} - \frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)},$$

soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+2n+1-\left(n^2+2n\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} = \dfrac{1}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}$.

Puisque n est un entier naturel, $n+1$ et $n+2$ sont deux nombres positifs. Leur produit est donc un nombre positif et son inverse également.

On a donc pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante.

- D'autre part, dans le cas d'une suite définie de manière explicite de type $u_n = f\left(n\right)$, il est clair que la suite varie de la même façon que la fonction qui la caractérise.

  En effet, pour tout n, $n < n+1$ et donc :
  - Dans le cas d'une fonction croissante, $f\left(n\right) \leq f\left(n+1\right)$ c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. La suite est croissante.
  - Dans le cas d'une fonction décroissante, $f\left(n\right) \geq f\left(n+1\right)$, c'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1}$. La suite est décroissante.

  On peut donc dans ce cas étudier les variations de la fonction f pour déterminer les variations de la suite. On dispose alors de tous les outils d'étude d'une fonction, en particulier la dérivation.

2.3. Limite

Comme pour les fonctions, on s'intéresse à la limite vers laquelle peut tendre une suite. Une différence notable réside dans le fait que dans le cas d'une suite, l'indice étant un entier naturel, il est toujours positif et ne peut pas tendre vers $-\infty$. Pour ce qui est d'une limite en un nombre a, pour une suite $\left(u_n\right)$, soit on a besoin de calculer u_a où a est un entier naturel, soit a n'est pas un entier naturel et le calcul de limite reviendrait à calculer $\lim\limits_{n \to a} u_n$ ce qui n'a pas de sens, puisqu'un entier naturel ne peut pas se rapprocher d'un nombre non entier à « le toucher » (comment se rapprocher avec des nombres entiers de 2,456 ?). On s'intéresse donc uniquement à la limite d'une suite lorsque l'indice n devient infiniment grand : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On peut donc simplifier la notation en $\lim u_n$ sans ambiguïté.

Comme pour les fonctions, une suite peut :

- avoir une limite finie l. On dit que la suite est convergente. Elle converge vers l. Par exemple, la suite $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ converge vers 3.
- avoir une limite infinie $+\infty$ ou $-\infty$. On dit que la suite est divergente. Elle diverge et tend vers plus ou moins l'infini.

  Par exemple, la suite $u_n = -n^2$ diverge et tend vers moins l'infini.
- ne pas avoir de limite. On dit que la suite est divergente.

  C'est le cas par exemple de la suite $u_n = \left(-1\right)^n$. Pour tout entier pair que l'on notera $= 2p$, on a $u_n = \left(-1\right)^{2p} = 1$. Et pour tout entier impair, $n = 2p+1$ on a $u_n = \left(-1\right)^{2p+1} = -1$. Ainsi, lorsque n devient infiniment grand, la suite prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle ne « tend vers rien ». Elle n'a pas de limite.

On remarque que la notion de suite divergente couvre deux cas distincts : une limite infinie ou pas de limite.

3. Quelques suites « classiques »

Trois types de suites sont étudiés au lycée, que nous allons présenter de manière synthétique dans ce paragraphe.

3.1. La suite arithmétique

- Une suite arithmétique est une suite dans laquelle on ajoute un nombre, appelé raison, pour passer d'un terme au terme suivant.

  De manière récurrente, la suite est donc définie par son terme initial u_0, par sa raison r et par la relation $u_{n+1} = u_n + r$, pour $n \geq 1$.
- Une suite arithmétique est donc croissante lorsque sa raison est positive et décroissante lorsque sa raison est négative. Elle est constante si sa raison est nulle.
- De manière explicite, on constate que le terme de rang n est obtenu en additionnant n fois la raison r au nombre initial u_0. On obtient donc pour tout n $u_n = u_0 + nr$.
- De cette dernière expression, on déduit qu'une suite arithmétique est basée sur l'expression d'une fonction affine de type $f(x) = rx + u_0$.

  La représentation graphique d'une suite arithmétique est donc constituée des points $(n, rn+u_0)$, situés sur la droite représentant la fonction affine $f(x)$, de pente r et d'ordonnée à l'origine u_0.
- Une suite arithmétique non constante (c'est-à-dire de raison non nulle) est divergente. Elle a pour limite $+\infty$ si $r > 0$ et $-\infty$ si $r > 0$.
- Terminons cette petite synthèse par le calcul de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Commençons par calculer la somme des n premiers entiers naturels, $S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$.

Pour cela, on peut l'écrire dans l'autre sens $S'_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$. En additionnant ces deux égalités, on obtient en groupant les termes deux par deux de gauche à droite :

$$2S_n = S_n + S'_n = \underbrace{1+n}_{\substack{1^{er} \text{ terme de } S \\ 1^{er} \text{ terme de } S'}} \underbrace{+2+(n-1)}_{\substack{2^e \text{ terme de } S \\ 2^e \text{ terme de } S'}} + \ldots + \underbrace{n+1}_{\substack{\text{dernier terme de } S \\ \text{dernier terme de } S'}}.$$

On constate que chacun des groupements de deux termes est égal à $n+1$ et qu'ils sont au nombre de n.

On obtient donc $2S=n\left(n+1\right)$, c'est-à-dire $S=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$.

On vérifie par exemple que pour $n=5$, $S_5=1+2+3+4+5=15$,

et que $\frac{5\left(5+1\right)}{2}=\frac{30}{2}=15$.

Calculons maintenant la somme des premiers termes d'une suite arithmétique

$$\underbrace{S=u_0+\left(u_0+r\right)+\left(u_0+2r\right)+\ldots+\left(u_0+\left(n-1\right)r\right)+\left(u_0+nr\right)}_{\text{Somme des }(n+1)\text{ premiers termes, de rang 0 à } n}.$$

En groupant d'une part les termes u_0 et d'autre part les termes r, on obtient :

$$S=\underbrace{u_0+\ldots+u_0}_{(n+1)\text{ fois}}+r+2r+\ldots+\left(n-1\right)r+nr.$$

Puis en mettant r en facteur : $S=\left(n+1\right)u_0+r\left(1+2+\ldots+\left(n-1\right)+n\right)$.

On reconnaît la somme des n premiers entiers naturels et d'après ce qui précède,

$$S=\left(n+1\right)u_0+r\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\left(n+1\right)\left(u_0+\frac{nr}{2}\right)=\left(n+1\right)\left(\frac{u_0+u_0+nr}{2}\right).$$

$$S=\left(n+1\right)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right).$$

3.2. La suite géométrique

Une suite géométrique est une suite dans laquelle on multiplie par un nombre, appelé raison, pour passer d'un terme au terme suivant.

De manière récurrente, la suite est donc définie par son terme initial u_0, par sa raison q et par la relation $u_{n+1}=u_n\times q$, pour $n\geq1$.

En ce qui concerne les variations d'une suite géométrique, commençons par observer que si la raison est négative, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, puisque changeant de signe à chaque multiplication. Une suite géométrique de raison négative n'est donc pas croissante ni décroissante.

Dans le cas d'une raison positive, tous les termes sont du même signe que le terme initial u_0.

- Si la raison est égale à 1, la suite est constante, égale à u_0.
- Si la raison est supérieure à 1, la valeur absolue du terme u_n augmente à chaque multiplication. La suite est donc croissante si le 1er terme u_0 est positif (les termes sont positifs et leur valeur absolue de plus en plus grande, ils sont donc eux-mêmes de plus en plus grands). La suite est décroissante si le 1er terme u_0 est négatif (les termes sont négatifs et leur valeur absolue de plus en plus grande, ils sont donc eux-mêmes décroissants).

- Si la raison est inférieure à 1, la valeur absolue du terme u_n diminue à chaque multiplication. La suite est donc décroissante si le 1er terme u_0 est positif (les termes sont positifs et leur valeur absolue de plus en plus petite, ils sont donc eux-mêmes de plus en plus petits). La suite est croissante si le 1er terme u_0 est négatif (les termes sont négatifs et leur valeur absolue de plus en plus petite, ils sont donc eux-mêmes croissants).
- Si la raison est égale à 0, la suite est constante, nulle, à partir de son deuxième terme.

De manière explicite, on constate que le terme de rang n est obtenu en multipliant n fois la raison q par le nombre initial u_0. On obtient donc pour tout n $u_n = u_0 q^n$.

La représentation graphique d'une suite géométrique est donc constituée des points $\left(n, u_0 q^n\right)$.

En termes de convergence, plusieurs cas peuvent se rencontrer :

- Une suite de raison 0 tend vers 0
- Une suite de raison 1 tend vers u_0
- Une suite de raison négative n'a pas de limite puisque ses termes changent de signe à chaque multiplication.
- Une suite de raison q vérifiant $0 < q < 1$ a pour limite 0.
- Une suite de raison q vérifiant $1 < q$ et $u_0 < 0$ a pour limite $-\infty$.
- Une suite de raison q vérifiant $1 < q$ et $u_0 > 0$ a pour limite $+\infty$.

Terminons également cette synthèse par le calcul la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 q + \ldots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$.

$S_n = u_0\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right)$.

Pour $q = 1$, on a $S_n = u_0\left(1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n+1}\right) = u_0 \underbrace{\left(1 + 1 + 1 + \ldots + 1\right)}_{n+1 \text{ fois}}$

C'est-à-dire $S_n = \left(n+1\right) u_0$

Pour $q \neq 1$, calculons la somme $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$, en observant que $\left(1-q\right)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) = 1 - q^{n+1}$ (après développement, les produits s'éliminent deux par deux sauf le 1er 1×1 et le dernier $-q \times q^n$). Pour $q \neq 1$, on a donc $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

3.3. La suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est définie par son terme initial u_0 et par une relation $u_{n+1} = au_n + b$, pour $n \geq 1$ où a et b sont deux réels avec $a \neq 1$ (si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique).

L'étude d'une telle suite se ramène à celle d'une suite géométrique, en utilisant une suite annexe définie pour tout n par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

Le terme $\frac{b}{1-a}$ provient de la résolution de l'équation $x = ax + b$ (Cette transformation vient du fait que l'on souhaite « recaler » la fonction affine $f(x) = ax + b$ sur la fonction linéaire $g(x) = ax$ par une translation, car $f\left(x - \frac{b}{1-a}\right) = ax$).

On vérifie en effet que :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a}.$$

$$v_{n+1} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = av_n.$$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison a et on connaît alors l'expression de son terme générique : $v_n = v_0 a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$.

Le terme générique d'une suite arithmético-géométrique est donc :

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}.$$

4. Suites et équations

Nous terminerons ce chapitre en évoquant un domaine d'application important des suites numériques, à savoir la résolution d'équations. Le cadre théorique dépasse celui d'un redémarrage des mathématiques. Il nous a néanmoins paru intéressant de mentionner cet aspect, en particulier pour ses applications pratiques de calcul par ordinateur.

On considère une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction. Lorsque l'on n'est pas capable de résoudre algébriquement cette équation, c'est-à-dire de trouver une formule littérale exprimant la solution, on peut bâtir une solution numérique. L'idée est de construire une suite convergente (x_n) telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

La solution de l'équation correspond alors à $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

La construction de la suite se fait par récurrence, en calculant les termes les uns après les autres. En pratique, on ne calcule pas la limite de la suite (ce qui reviendrait à calculer un nombre infini de termes et donc à ne jamais finir le calcul). On s'arrête lorsque l'on considère que l'erreur commise par rapport à la solution exacte (que l'on ne connaît pas) est acceptable dans le contexte donné. On notera qu'il faut donc non seulement calculer les termes de la suite mais être capable d'estimer l'erreur commise.

Les méthodes les plus classiques de construction de ces suites qui permettent d'approcher la solution d'une équation $f(x)=0$ sont la méthode de dichotomie, la méthode de Newton ou Newton-Raphson (du nom des mathématiciens Isaac Newton et Joseph Raphson) et la méthode de Lagrange (du nom du mathématicien Joseph Louis Lagrange).

Pour aller plus loin

Le lecteur intéressé pourra se référer à des ouvrages de l'enseignement supérieur traitant de la résolution numérique d'équations.

Chapitre 8

Proportionnalité

1. Qu'est-ce que la proportionnalité ?

La proportionnalité est un des fils rouges du programme de mathématiques de l'Éducation Nationale. Elle revient tous les ans, peu à peu complétée de divers éléments. Outre son intérêt dans la vie pratique (la fameuse « règle de trois » que nous verrons plus loin), la notion de proportionnalité est fondamentale en algèbre. Elle ouvre en effet la voie vers l'algèbre linéaire qui est une branche incontournable des mathématiques. Il nous paraît donc indispensable de lui consacrer un chapitre dans le cadre d'un (re)démarrage des mathématiques.

1.1. Notion de proportionnalité

Deux grandeurs numériques sont dites proportionnelles lorsque l'on peut en calculer une à partir de l'autre en multipliant toujours par un même coefficient, que l'on appelle coefficient de proportionnalité.

Par exemple, lorsque l'on achète de l'essence, le prix payé en euros est proportionnel à la quantité d'essence achetée. Le coefficient de proportionnalité est alors le prix d'un litre d'essence. On multiplie le nombre de litres achetés par le prix au litre pour obtenir le prix à payer.

D'une manière générale, une situation de proportionnalité peut donc donner lieu à une illustration via un tableau de proportionnalité :

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	0	15	20	35	40
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	0	22,5	30	52,5	60

$\times 1{,}5$

On passe d'une ligne à l'autre du tableau en multipliant par le coefficient de proportionnalité. Dans notre cas, il est égal à 1,5 (on suppose donc ici qu'un litre d'essence coûte 1,5 €/ litre).

À noter que beaucoup de cas de la vie courante ne représentent pas une situation de proportionnalité. Ainsi, d'un point de vue mathématique, et contrairement au langage courant, le prix d'une course de taxi n'est pas proportionnel à la distance parcourue. En effet, le fait de monter dans le taxi entraîne un coût de prise en charge et donc une distance de zéro kilomètre ne donne pas lieu à un prix de zéro euro. Or, dans une situation de proportionnalité, 0 dans une grandeur correspond toujours à 0 dans l'autre grandeur, puisque 0 multiplié par le coefficient de proportionnalité, quel qu'il soit, donnera toujours comme résultat 0.

1.2. Propriétés de linéarité et lien avec les fonctions

En situation de proportionnalité, on observe deux propriétés qui peuvent apparaître intuitives et évidentes à certains.

D'une part, si on regarde le tableau ci-dessus, le prix de 35 litres d'essence est égal à la somme du prix de 15 litres et du prix de 20 litres. En effet, puisque l'on a $15+20=35$ dans la grandeur 1, on obtient par correspondance $22{,}5+30=52{,}5$ dans la grandeur 2. Ainsi, le fait d'additionner deux valeurs de la grandeur 1 fait évoluer la grandeur 2 de la même manière.

D'un point de vue algébrique, cela est une application directe de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Si x et y représentent deux valeurs de la grandeur 1 et que a représente le coefficient de proportionnalité, $a(x+y)=ax+ay$. Dans notre exemple :

$$1{,}5\times 35=\underbrace{1{,}5\times(15+20)}_{a(x+y)}=\underbrace{1{,}5\times 15+1{,}5\times 20}_{ax+by}=22{,}5+30$$

D'un point de vue « fonctionnel », si on modélise la relation de proportionnalité par une fonction en appelant x la valeur de la grandeur 1 et $f(x)$ la valeur correspondante de la grandeur 2, cette première propriété s'exprime par la formule : $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	x	y	$x+y$
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	$f(x)$	$f(y)$	$f(x+y)$ $=f(x)+f(y)$

D'autre part, on constate également dans le tableau que le prix de 40 litres est le double de celui de 20 litres. En effet, puisque l'on a $20\times 2=40$ dans la grandeur 1, on obtient par correspondance $30\times 2=60$, dans la grandeur 2.

Ainsi, le fait de multiplier par un nombre quelconque une valeur de la grandeur 1 fait évoluer la grandeur 2 de la même manière.

D'un point de vue algébrique, cela est une application directe de l'associativité et de la commutativité de la multiplication. Si x représente une valeur de la grandeur 1, que k représente un facteur multiplicatif quelconque et que a représente le coefficient de proportionnalité, $a\times kx=k\times ax$. Dans notre exemple :

$$1{,}5\times 40=\underbrace{1{,}5\times 2\times 20}_{a\times kx}=\underbrace{2\times 1{,}5\times 20}_{k\times ax}=2\times 30$$

D'un point de vue « fonctionnel », si on modélise la relation de proportionnalité par une fonction en appelant x la valeur de la grandeur 1 et $f(x)$ la valeur correspondante de la grandeur 2, cette deuxième propriété s'exprime par la formule : $f(kx)=kf(x)$, où k représente un nombre quelconque.

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	x	kx
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	$f(x)$	$f(kx)=kf(x)$

Les deux propriétés précédentes traduisent le concept mathématique de linéarité.

Dans le cas de fonction réelle d'une variable réelle, seule catégorie de fonction abordée dans cet ouvrage, on constate que f est une fonction linéaire, de coefficient a, puisque $f(x)=ax$ (voir chapitre 6 paragraphe 1.5).

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	x	$\times a$
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	$f(x)=ax$	

Inversement, on peut se demander si les fonctions linéaires sont les seules qui vérifient les propriétés de linéarité. Tel est bien le cas. En effet, d'après la deuxième propriété de linéarité, pour tous nombres réels x et k, $f(kx)=kf(x)$. Prenons $x=1$, on a donc pour tout nombre réel k, $f(k)=f(k\times1)=kf(1)$. La fonction f est donc de la forme $x\mapsto f(1)x$, c'est-à-dire une fonction linéaire $(a=f(1))$.

Pour aller plus loin

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les fonctions s'appliquent à des objets mathématiques autres que des nombres, les fonctions qui vérifient ces deux propriétés sont également appelées des fonctions linéaires. Les structures algébriques qui créent le cadre théorique nécessaire à l'étude de telles fonctions s'appellent des espaces vectoriels. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre linéaire de l'enseignement supérieur.

1.3. Calculs liés à la proportionnalité – règle de trois

Reprenons notre tableau de proportionnalité lié au prix de l'essence.

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	15
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	22,5

Imaginons maintenant que nous ne connaissions pas le coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire dans notre cas le prix d'un litre d'essence, et que nous voulions calculer le prix P à payer pour une certaine quantité, par exemple 43 litres ou bien, problème inverse, la quantité Q achetée pour un prix donné, par exemple, 72 euros.

Grandeur 1 Ex. : Quantité d'essence en litre	15	43	Q ?
Grandeur 2 Ex. : Prix en euros	22,5	P ?	72

On peut calculer le coefficient de proportionnalité a, en utilisant les données du tableau : $a=\dfrac{22{,}5}{15}=1{,}5$.

Une fois connu le coefficient, en l'occurrence 1,5, on déduit :

$P=43\times 1{,}5=64{,}5$ et $Q=\dfrac{72}{1{,}5}=48$.

Mais on n'est pas obligé de calculer explicitement le coefficient de proportionnalité, en considérant que la proportionnalité des grandeurs nous permet d'écrire : $\dfrac{22{,}5}{15}=\dfrac{P}{43}$ et $\dfrac{22{,}5}{15}=\dfrac{72}{Q}$.

On résout alors ces équations (voir chapitre 4 paragraphe 3.1) et on obtient : $P=\dfrac{22{,}5\times 43}{15}=64{,}5$ et $Q=\dfrac{72\times 15}{22{,}5}=48$.

On peut également voir le calcul précédent comme une application de la 2[e] propriété de linéarité : on passe d'une colonne à l'autre en multipliant par le rapport qui lie les nombres que l'on connaît.

$15\times\dfrac{43}{15}=43$

15	43
22,5	$P=22{,}5\times\dfrac{43}{15}$

15	$Q=15\times\dfrac{72}{22{,}5}$
22,5	72

$22{,}5\times\dfrac{72}{22{,}5}=72$

Ce calcul « direct », sans revenir au coefficient de proportionnalité constitue la « règle de trois », qui consiste à calculer, en situation de proportionnalité, la donnée manquante à partir des trois données connues.

En terme de « recette de cuisine », cela revient à faire le « produit de la diagonale » et à diviser par la troisième donnée disponible.

15	43	$P=\dfrac{22{,}5\times 43}{15}$
22,5	P ?	
15	Q ?	$Q=\dfrac{15\times 72}{22{,}5}$
22,5	72	

1.4. Proportion et pourcentage

Une proportion s'exprime souvent comme une fraction puisqu'elle exprime le rapport entre une quantité et un tout.

Ainsi, regardons par exemple la proportion d'élèves admis en médecine après la 1re année d'études par rapport au nombre d'inscrits en PACES (Première année Commune aux Études de Santé). Elle était durant l'année scolaire 2015-2016 de 351 sur 2 442 (c'est-à-dire $\frac{351}{2\,442}$) à l'université Paris Descartes et de 155 sur 1 176 (c'est-à-dire $\frac{155}{1176}$) à l'université Paris Créteil (source : l'Étudiant).

Il est souvent utile de comparer des proportions. Dans notre exemple, un étudiant voudra ainsi comparer les taux de réussite des deux universités. Pour cela, on utilise souvent les pourcentages. L'idée est de se ramener à une base de 100 et de comparer ainsi les proportions sur une base commune.

En terme algébrique, cela revient à exprimer un quotient avec un dénominateur commun égal à 100.

- Pour Paris Descartes $\frac{351}{2\,242} \cong 0{,}1566$. Or $0{,}1566 = \frac{15{,}66}{100} = 15{,}66\,\%$
- Pour Paris Créteil $\frac{155}{1176} \cong 0{,}1318$. Or $0{,}1318 = \frac{13{,}18}{100} = 13{,}18\,\%$

On peut également voir ce calcul comme une règle de trois.

Places en médecine	351	*P* ?
Inscrits PACES	2 242	100

On trouve $p = \frac{351 \times 100}{2\,242} \cong 15{,}66$. Le pourcentage de réussite à Paris Descartes est donc à peu près de 15,66 pour cent.

Places en médecine	155	*P* ?
Inscrits PACES	1 176	100

On trouve $p = \frac{155 \times 100}{1176} \cong 13{,}18$. Le pourcentage de réussite à Paris Créteil est donc à peu près de 13,18 pour cent.

Note Pour un mathématicien, « % » veut dire « divisé par 100 ».

Ainsi $20\,\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$. C'est pour cela que dans les calculs précédents, on a écrit $\frac{15{,}66}{100} = 15{,}66\,\%$ et $\frac{351 \times 100}{2\,242} \cong 15{,}66$ (et non pas $\frac{351 \times 100}{2\,242} \cong 15{,}66\,\%$).

Pour les non mathématiciens, il y a souvent confusion et beaucoup de gens écrivent $\frac{351 \times 100}{2\,242} \cong 15{,}66\,\%$ dans leur calcul de règle de trois, ce qui algébriquement parlant est incorrect.

2. Proportionnalité et évolution

2.1. Variation absolue

Lorsqu'une quantité varie d'une valeur initiale Q_i à une quantité finale Q_f, on appelle variation absolue la différence $Q_f - Q_i$.
Ainsi :

- un prix qui augmente de 45 € à 63 € correspond à une variation absolue de 18 €.
- un prix qui diminue de 63 € à 45 € correspond à une variation absolue de –18 €

2.2. Variation relative

En pratique, la variation absolue n'est pas toujours un indicateur très significatif. À titre d'exemple, d'après l'INSEE, le salaire brut moyen d'un ouvrier en 2015 était de 2 266 €. Si ce salaire connaît une variation absolue de 1 €, cela est négligeable. Si une baguette qui coûte 1,10 € augmente de 1 €, la variation absolue est la même, mais l'impact est beaucoup plus fort puisque le prix de la baguette a quasiment doublé.

On utilise donc couramment une autre mesure de la variation qui est la variation relative, qui évalue la variation proportionnellement à la quantité initiale.

Il s'agit donc du rapport $\frac{\text{Variation absolue}}{\text{Quantité initiale}} = \frac{Q_f - Q_i}{Q_i}$.

Ainsi, dans les exemples précédents :

- on observe une variation relative du salaire égale à $\frac{1}{2\,266} \cong 0{,}0004$, soit $\frac{0{,}04}{100} = 0{,}04\,\%$, donc tout à fait insignifiante.
- dans le cas de la baguette, la variation relative est $\frac{1}{1{,}1} \cong 0{,}91$, soit $\frac{91}{100} = 91\,\%$, donc tout à fait considérable.

Cette variation relative est également appelée taux d'évolution. Dans notre exemple, le prix de la baguette a connu un taux d'évolution de 0,91 ou 91 %.

Si le taux d'évolution est positif, il y a augmentation, si le taux est négatif, il y a baisse ou diminution.

2.3. Coefficient multiplicateur

Considérons une quantité initiale Q_i qui connaît une évolution dont le taux est t. La variation absolue de la quantité est égale à $Q_i \times t$.

Exemple Si un prix de 150 € baisse de 30 %, on a :

$Q_i = 150$ et $t = -30\,\% = -\dfrac{30}{100} = -0{,}3$.

La variation absolue est $150 \times (-0{,}3) = -45$, le prix baisse de 45 €.

La quantité finale est donc égale à $Q_f = \underbrace{Q_i}_{\text{Quantité initiale}} + \underbrace{Q_i \times t}_{\text{Variation}}$, ce qui donne, en factorisant l'expression :

$$Q_f = Q_i(1+t).$$

On déduit de ce qui précède, que lors d'une évolution de taux t, on obtient la quantité finale directement à partir de la quantité initiale en multipliant celle-ci par le facteur $(1+t)$, communément appelé coefficient multiplicateur.

Deux remarques

- Il n'est donc pas nécessaire de calculer la variation absolue pour connaître la quantité finale.
  Ainsi, si un prix de 150 € baisse de 30 %, il suffit de faire le calcul $150 \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 150 \times (1 - 0{,}3) = 150 \times 0{,}7 = 105$ pour obtenir le nouveau prix.
- La quantité finale est proportionnelle à la quantité initiale, le rapport de proportionnalité étant égal à $(1+t)$.

Inversement, si on connaît les quantités initiale et finale, on en déduit le taux d'évolution :

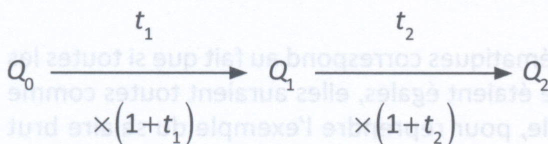
$$t = \frac{Q_f}{Q_i} - 1$$

Exemple Si le cours d'une action passe de 132 € à 137 €, l'augmentation est de $\dfrac{137}{132} - 1 \cong 1{,}0379 - 1 = 0{,}0379 = \dfrac{3{,}79}{100} = 3{,}79\,\%$.

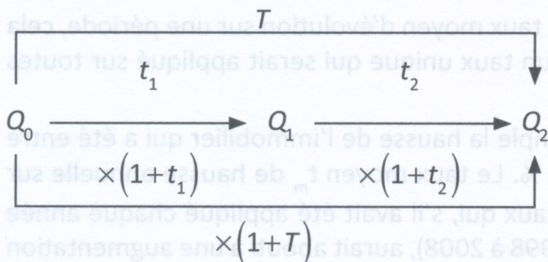
Cette notion de coefficient multiplicateur et de proportionnalité est très importante car elle permet de mener des calculs sur les taux d'évolutions de manière simple. Ainsi, les trois types de calcul qui suivent et qui peuvent paraître un peu fastidieux à première vue se clarifient si on les aborde sous l'angle du coefficient multiplicateur.

2.4. Évolutions successives

La notion de coefficient multiplicateur est particulièrement utile lorsque plusieurs évolutions s'enchaînent. En effet considérons une quantité Q_0 qui subit une première évolution de taux t_1 puis une seconde de taux t_2.



Si on considère l'évolution globale de taux T de Q_0 à Q_2, on a :



On en déduit : $1+T=(1+t_1)(1+t_2)$

Ainsi, le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs des différentes évolutions élémentaires.

Exemple

Un article est soldé une première fois de 40 % et une deuxième fois de 50 %.

Le coefficient multiplicateur global est donc :

$$\left(1-\frac{40}{100}\right)\left(1-\frac{50}{100}\right)=0{,}6\times0{,}5=0{,}3$$

Et le taux d'évolution globale est donc :

$$T=0{,}3-1=-0{,}7=-\frac{70}{100}=-70\ \%$$

Une baisse de 40 % suivie d'une baisse de 50 % correspond donc à une baisse cumulée de 70 %.

Remarques

- La baisse globale n'est pas égale à $40\,\% + 50\,\% = 90\,\%$.
- On a calculé la variation globale en raisonnant uniquement sur les taux, sans avoir besoin de fixer une quantité Q_0.

De manière générale, si on cumule un nombre n de variations de taux respectifs $t_1, t_2, \dots, t_n$, le taux de variation global vérifie :

$$1+T=\left(1+t_1\right)\left(1+t_2\right)\dots\left(1+t_n\right)$$

C'est-à-dire $T=\left(1+t_1\right)\left(1+t_2\right)\dots\left(1+t_n\right)-1$

2.5. Évolution moyenne

La notion de moyenne en mathématiques correspond au fait que si toutes les valeurs dont on fait la moyenne étaient égales, elles auraient toutes comme valeur la moyenne. Par exemple, pour reprendre l'exemple du salaire brut moyen de 2 266 €, cela signifie que si tous les ouvriers avaient perçu le même salaire en 2015, ils auraient tous perçu 2 266 €.

Si on applique cette notion à un taux moyen d'évolution sur une période, cela signifie que le taux moyen est un taux unique qui serait appliqué sur toutes les sous-périodes.

Exemple

Considérons par exemple la hausse de l'immobilier qui a été entre 1998 et 2008 de 140 %. Le taux moyen t_m de hausse annuelle sur cette période est le taux qui, s'il avait été appliqué chaque année pendant 10 ans (de 1998 à 2008), aurait abouti à une augmentation globale de 140 %.

On a donc, par application du résultat du paragraphe précédent :

$$1+140\,\%=\underbrace{\left(1+t_m\right)\left(1+t_m\right)\dots\left(1+t_m\right)}_{10\text{ fois}}=\left(1+t_m\right)^{10}$$

On a donc : $2{,}4=\left(1+t_m\right)^{10}$

D'où on déduit : $t_m=\sqrt[10]{2{,}4}-1\cong 1{,}0915-1=0{,}0915=9{,}15\,\%$

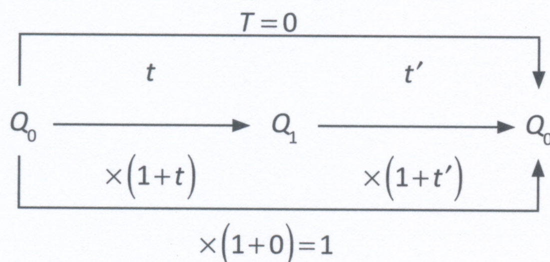
(La notation $\sqrt[10]{x}$ désigne la « racine dixième » du nombre x ; c'est le nombre positif qui élevé à la puissance 10 est égal à x).

Remarque Une hausse moyenne de 140 % sur 10 ans ne correspond pas au calcul $\dfrac{140}{10}=14$.

2.6. Évolution réciproque

La dernière question à laquelle nous nous intéresserons est celle du taux d'évolution réciproque. En d'autres termes, si une quantité a connu une évolution de taux t, quel taux t' appelé « réciproque » va permettre de revenir à la situation initiale ? À titre d'illustration, si le cours d'une action a chuté de 20 %, quel pourcentage d'augmentation est nécessaire pour revenir au prix initial ?

Ce problème devient assez simple si on se le représente comme une succession d'évolutions vues au paragraphe 2.4.



On part en effet d'une quantité, qui subit une évolution t, puis une évolution t', pour revenir à sa valeur initiale. Son taux global d'évolution à l'issue de ces deux opérations est donc nul. Si on raisonne en coefficient multiplicateur, on observe donc que la formule du 2.4., $1+T=(1+t_1)(1+t_2)$, s'écrit : $1=(1+t)(1+t')$. On en déduit $1+t'=\dfrac{1}{1+t}$ c'est-à-dire $t'=\dfrac{1}{1+t}-1$.
Dans le cas de notre action, $t=-20\,\%=-0{,}20$ et
$t'=\dfrac{1}{1-0{,}20}-1=\dfrac{1}{0{,}8}-1=1{,}25-1=0{,}25=25\,\%$.
Une baisse de 20 % est donc compensée par une hausse de 25 %.

Remarques

- Le taux réciproque n'est pas égal à l'opposé du taux d'évolution.
- On a là encore calculé le taux réciproque en raisonnant uniquement sur les taux, sans avoir besoin de fixer une quantité Q_0.

Chapitre 9

Un peu de raisonnement mathématique

La logique et la rigueur sont au cœur des mathématiques. Au-delà de l'aspect calculatoire et en complément de la conception de modèles plus ou moins abstraits, il est impératif de pouvoir expliquer et démontrer les choses. Nous présentons dans ce chapitre les raisonnements mathématiques parmi les plus fréquemment utilisés.

1. Le raisonnement déductif

Ce type de raisonnement consiste à déduire, à partir d'une ou de plusieurs propositions, un résultat qui en est la conséquence.

1.1. L'implication

L'implication traduit un rapport de cause à effet. Par exemple, dans la vie courante : « il pleut **donc** la route est mouillée ».

À titre d'illustration, le critère de divisibilité par 3 traduit une implication qui est « Si la somme des chiffres d'un nombre est un multiple de 3, **alors** ce nombre est lui-même un multiple de 3 ».
Application : $1+2+0+3=6=3\times2$, **donc** 1 203 est un multiple de 3.

L'implication se note « $\Rightarrow$ ». « A implique B » se note $A \Rightarrow B$.

Par exemple : $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (en effet $x-3=0 \Rightarrow x-3+3=0+3$).

1.2. La contraposée (ou conséquence)

La contraposée d'une implication traduit **la même relation de cause à effet** en utilisant une formulation contraire. S'agissant de la même relation, une implication et sa contraposée sont donc vraies ou fausses conjointement.

De manière générale, la contraposée de « A implique B » est « le contraire de B implique le contraire de A ».

La contraposée de « il pleut donc la route est mouillée » est « la route **n'est pas** mouillée donc il **ne pleut pas** ».

La contraposée du critère de divisibilité par 3, est « Si un nombre **n'est pas** un multiple de 3, alors la somme de ses chiffres **n'est pas** un multiple de 3 ».

La contraposée de $(x-3=0 \Rightarrow x=3)$ est $(x \neq 3 \Rightarrow x-3 \neq 0)$.

La contraposée peut être plus facile à démontrer que l'implication initiale. Puisqu'elles sont vraies ou fausse conjointement, cela revient au même de montrer l'une ou l'autre.

Illustration

Nous allons montrer par contraposition l'implication suivante « Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est pair ». Sa contraposée est « Si un nombre entier n'est pas pair, alors son carré n'est pas pair », c'est-à-dire « Si un nombre entier est impair, alors son carré est impair ». Montrons cette dernière implication. Un nombre impair s'écrit sous la forme $2n+1$.

D'après l'identité remarquable, on a :
$(2n+1)^2 = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2$.
Donc $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ qui est bien un nombre impair. Au final, on a bien démontré par contraposition l'implication « Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est pair ».

2. Le raisonnement par équivalence

2.1. La réciproque

La réciproque d'une implication traduit la relation de cause à effet inverse. À la différence de la contraposée, une implication et sa réciproque ne sont pas forcément vraies en même temps.

La réciproque de « il pleut donc la route est mouillée » est « la route est mouillée donc il pleut ». Elle n'est pas vérifiée, puisque la route peut être mouillée à

cause d'un arrosage, sans qu'il pleuve. De même, la proposition « si un nombre est multiple de 10 alors il est multiple de 5 » est vraie et la réciproque « si un nombre est multiple de 5 alors il est multiple de 10 » est fausse, puisque 15 est multiple de 5 sans être multiple de 10.

La réciproque du critère de divisibilité par 3 est « Si un nombre est un multiple de 3 alors la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ». Elle est vérifiée. La réciproque de $\left(x-3=0 \Rightarrow x=3\right)$ est $\left(x=3 \Rightarrow x-3=0\right)$, qui est vraie (en effet $\left(x=3 \Rightarrow x-3=3-3\right)$).

2.2. L'équivalence

Lorsqu'une implication et sa réciproque sont toutes les deux vérifiées, les deux propositions sont dites équivalentes. Elles représentent en fait deux formulations d'une même proposition. L'équivalence se note « $\Leftrightarrow$ ». Par exemple, le critère de divisibilité par 3 traduit une équivalence. « Un nombre est un multiple de 3 » est équivalent à « la somme des chiffres d'un nombre est un multiple de 3 ». De même, $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$, ou encore $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Le raisonnement par équivalence consiste donc à reformuler une même proposition jusqu'à arriver au résultat voulu.

Les résolutions d'équations telles que nous les avons vues en calcul littéral sont typiques d'un raisonnement par équivalence. À chaque étape de calcul, les égalités sont équivalentes les unes aux autres.

$3\left(x+2\right)=2x+8 \Leftrightarrow 3x+6=2x+8 \Leftrightarrow 3x+6-6=2x+8-6$

$\Leftrightarrow 3x=2x+2 \Leftrightarrow 3x-2x=2x-2x+2 \Leftrightarrow x=2$

Au final, déterminer x tel que $3\left(x+2\right)=2x+8$ est la même chose que déterminer x tel que $x=2$.

De même, pour résoudre l'équation $x\left(x+1\right)=x+1$, on peut raisonner par équivalence :

$x\left(x+1\right)=x+1 \Leftrightarrow x^2+x=x+1 \Leftrightarrow x^2+x-x=x-x+1$

$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left(x=1\right)$ ou $(x=-1)$, les deux seuls nombres ayant pour carré 1 étant 1 et -1.

Il est important de comprendre quand deux propositions ne sont pas équivalentes, sous peine de commettre une faute de raisonnement. Ainsi dans l'exemple précédent, on pourrait être tenté de résoudre l'équation en divisant les deux membres de l'égalité par le terme $x+1$.

On obtient : $x\left(x+1\right)=x+1 \Leftrightarrow \dfrac{x\left(x+1\right)}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1} \Leftrightarrow x=1.$

On constate que l'on a « perdu » la solution $x=-1$. L'explication est que la première équivalence n'en est pas une. Lorsqu'on divise par $x+1$, on suppose implicitement que $x+1$ n'est pas nul (puisque l'on ne peut pas diviser par 0). Or la 1re égalité n'impose pas que $x+1$ ne soit pas nul. Les deux expressions ne sont donc pas équivalentes.

En d'autres termes, L'implication $x(x+1)=x+1 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}$ est fausse puisqu'elle suppose implicitement $x(x+1)=x+1 \Rightarrow x+1 \neq 0$, qui est évidemment une implication erronée.

Un raisonnement correct impose de distinguer deux cas :

- $x+1=0$.

  L'équation s'écrit alors $x \times 0=0$, c'est-à-dire $0=0$.

  Elle est vérifiée et $x=-1$ est donc une solution.
- $x+1 \neq 0$.

  On peut alors écrire la suite d'équivalence ci-dessus et constater que $x=1$ est également une solution.

Note importante Dans de nombreux cas, il est difficile de raisonner par équivalence et pour démontrer $(A \Leftrightarrow B)$ on doit montrer successivement les deux implications réciproques $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$.

Vocabulaire complémentaire

En terme rédactionnel, on utilise communément la formulation « si et seulement si » (abrégée en ssi) pour exprimer la notion d'équivalence. Par exemple $x-3=0$ si et seulement si $x=3$. Le premier « si » indique l'implication $x=3 \Rightarrow x-3=0$ ($x-3=0$ si $x=3$). Le « seulement si » traduit l'implication $x \neq 3 \Rightarrow x-3 \neq 0$ (si x n'est pas égal à 3, alors $x-3$ n'est pas égal à zéro), c'est-à-dire la contraposée de $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Au final, « si et seulement si » traduit bien $x=3 \Leftrightarrow x-3=0$.

3. La démonstration par l'exemple ou le contre-exemple

Lorsque l'on veut démontrer qu'une propriété est fausse, il est souvent utile d'identifier un contre-exemple.

Ainsi, comme on l'a vu dans ce qui précède, l'affirmation « Tout multiple de 5 est multiple de 10 » est fausse, 15 constituant un contre-exemple. Une fois identifié le contre-exemple, on n'a pas à se préoccuper d'une démonstration plus générale.

En revanche, pour montrer qu'une propriété est vraie, il ne suffit pas de la vérifier pour quelques exemples. Ainsi « Tout multiple de 10 est multiple de 5 » est une affirmation vraie. Mais il ne suffit pas de constater que 10, 20, 30 et 40 sont à la fois multiples de 10 et de 5. Il s'agit de le démontrer pour **tout** multiple de 10. On est donc obligé de considérer un multiple de 10 quelconque, c'est-à-dire de la forme $10n$ où n désigne un entier naturel. On écrit alors $10n = 5 \times 2n$, ce qui montre qu'il s'agit également d'un multiple de 5.

4. Le raisonnement par disjonction de cas

S'il est impossible de démontrer un résultat général à partir de quelques exemples, le raisonnement par disjonction de cas permet cependant de démontrer une proposition en la prouvant uniquement dans un nombre fini de cas. Il s'agit de situations particulières dans lesquelles un nombre fini de cas recouvre en fait tous les cas possibles.

Un exemple typique est lorsque l'on sépare les nombres en positifs et négatifs. Si x est un nombre positif, x^2 est positif car le produit d'un nombre positif par un nombre positif est positif. Si x est un nombre négatif, x^2 est également positif car le produit d'un nombre négatif par un nombre négatif est positif. On a démontré que le carré x^2 d'un nombre quelconque x est toujours positif en distinguant deux cas qui permettent de couvrir tous les nombres.

Montrons par un tel raisonnement que pour tout entier naturel n, le nombre $A = n\left(n^2 + 5\right)$ est divisible par 3.

On peut calculer quelques exemples, ce qui ne démontre rien mais permet d'illustrer ce résultat.

- $n = 1 \quad A = 1 \times \left(1^2 + 5\right) = 6 = 3 \times 2$
- $n = 2 \quad A = 2 \times \left(2^2 + 5\right) = 18 = 3 \times 6$
- $n = 3 \quad A = 3 \times \left(3^2 + 5\right) = 3 \times 14$

Pour démontrer, on considère un entier naturel quelconque n. On va étudier trois cas qui vont nous permettre de répondre à la question posée.

- **1er cas** : on suppose que n est divisible par 3, c'est-à-dire $n = 3p$ où p est un entier naturel. $p\left(\left(3p\right)^2 + 5\right)$ étant un nombre entier, $A = 3p\left(\left(3p\right)^2 + 5\right)$ est bien un multiple de 3.
- **2e cas** : on suppose que le reste de la division de n par 3 est 1, c'est-à-dire $n = 3p + 1$.
  $A = \left(3p+1\right)\left(\left(3p+1\right)^2 + 5\right) = \left(3p+1\right)\left(\left(3p\right)^2 + 2 \times 3p \times 1 + 1^2 + 5\right)$

$(3p+1)(3p^2+2p+2)$ étant un nombre entier,

$A=3(3p+1)(3p^2+2p+2)$ est bien un multiple de 3.

- **3ᵉ cas** : on suppose que le reste de la division de n par 3 est 2, c'est-à-dire $n=3p+2$.

  $A=(3p+2)\left((3p+2)^2+5\right)=(3p+2)\left((3p)^2+2\times3p\times2+2^2+5\right)$

  $(3p+2)(3p^2+4p+3)$ étant un nombre entier,

  $A=3(3p+2)(3p^2+4p+3)$ est bien un multiple de 3.

Le reste de la division par 3 d'un entier naturel n ne pouvant être égal qu'à 0, 1 ou 2, les trois cas précédents couvrent bien tous les cas possibles et permettent d'affirmer que l'on a bien démontré la propriété pour tout entier naturel.

Pour terminer, on notera que dans la 2ᵉ méthode de résolution de l'équation $x(x+1)=x+1$, utilisée au paragraphe 2.2 ci-dessus, on a raisonné par disjonction de cas en distinguant $x+1=0$ et $x+1\neq0$.

5. Le raisonnement par l'absurde

Dans le raisonnement par l'absurde, pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse. On suppose donc sa négation et on montre que cette dernière est impossible, en mettant en évidence son caractère absurde.

Montrons par un tel raisonnement que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On fait l'hypothèse que c'est faux, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

On peut alors l'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux. En élevant cette égalité au carré, on a donc $\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$, c'est-à-dire $2=\frac{p^2}{q^2}$, où encore $2q^2=p^2$. p^2 est donc un multiple de 2. D'après la proposition que nous avons démontrée dans le paragraphe sur la contraposée ci-dessus, p^2 étant un nombre pair, on peut affirmer que p est un nombre pair.
On peut donc écrire $p=2m$.
Reprenons alors notre égalité $2q^2=p^2$.
Elle s'écrit $2q^2=(2m)^2$, soit $2q^2=4m^2$, où encore $q^2=2m^2$. q^2 est donc un nombre pair et par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que q est un nombre pair. p et q admettant tous deux 2 comme diviseur, ils ne sont donc pas premiers entre eux. Or ceci est absurde puisque l'on a supposé que $\frac{p}{q}$ était

l'écriture sous forme irréductible du nombre rationnel $\sqrt{2}$. Notre hypothèse initiale « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc impossible, ce qui démontre que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

6. Le raisonnement par analyse – synthèse

Ce type de raisonnement permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un élément qui vérifie des propriétés données. On raisonne en deux temps :

- L'analyse : on suppose l'existence de l'élément et on détermine les conditions nécessaires qu'il doit vérifier. Cela montre qui si l'élément existe, il est unique.
- La synthèse : on considère l'élément caractérisé dans la partie analyse, et on vérifie qu'il a bien les propriétés voulues (cela assure l'existence).

Montrons par un tel raisonnement que toute fonction f définie sur l'ensemble des réels s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Une fonction paire g est une fonction telle que tout nombre a la même image que son opposé, c'est-à-dire que pour tout nombre x de son domaine de définition, $g(-x)=g(x)$. Par exemple, la fonction carrée est une fonction paire sur $\mathbb{R}$.

Une fonction impaire h est une fonction telle que tout nombre et son opposé ont des images opposées, c'est-à-dire que pour tout nombre x de son domaine de définition, $h(-x)=-h(x)$. Par exemple, une fonction linéaire est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

Analyse

On suppose le résultat. On a donc $f=g+h$ où g est une fonction paire et h une fonction impaire. Pour tout nombre réel x :
$f(x)=g(x)+h(x)$ et $f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$.
En additionnant ces deux égalités, on obtient $f(x)+f(-x)=2g(x)$.
En les soustrayant, on obtient $f(x)-f(-x)=2h(x)$.
Ainsi, la partie « analyse » du raisonnement, montre qui si g et h existent, elles ont nécessairement les expressions suivantes :

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Synthèse

On va montrer que les deux fonctions ainsi définies répondent bien au problème posé. On doit vérifier trois choses :

- **1.** $f = g + h$. Ce qui est bien le cas. En effet, pour tout réel,

$$g(x)+h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x).$$

- **2.** g est une fonction paire. Pour tout réel x, on a

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$$

- **3.** h est une fonction impaire. Pour tout réel x, on a

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$$

En conclusion, on a bien montré le résultat demandé.

7. Le raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement est lié à l'ensemble des entiers naturels. Il s'utilise donc en arithmétique qui étudie les entiers naturels et dans l'étude des suites dont les termes sont indexés par les entiers naturels.

Il repose sur le fait de pouvoir passer « de proche en proche » d'un entier naturel à celui qui le suit en ajoutant 1. Le raisonnement par récurrence est construit en deux étapes :

- L'initialisation : montrer un résultat pour un certain entier naturel n_0
- L'hérédité : montrer que si le résultat est vrai pour un entier quelconque n, alors il est également vrai pour le nombre suivant $n+1$.

Puisque le résultat est vrai pour n_0, il l'est également pour n_0+1 d'après l'hérédité. L'application successive de l'hérédité permet ensuite de déduire que le résultat est également vrai pour $(n_0+1)+1=n_0+2$, puis pour $(n_0+2)+1=n_0+3$ et ainsi de suite. Le résultat est donc au final vrai pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

À titre d'illustration, nous allons utiliser ce type de raisonnement pour montrer une propriété d'arithmétique puis une autre concernant les suites.

Arithmétique

La somme des carrés des n premiers nombres entiers vérifie

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple Pour $n=5$,

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55$

et on a bien $\frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6}=\frac{5\times6\times11}{6}=55.$

Démonstration :

- Initialisation :

  On vérifie cette propriété pour $n_0=1$.

  En effet, $1^2=1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$

- Hérédité :

  On suppose cette propriété vraie à un rang quelconque n, soit :

  $$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

  On cherche alors à la montrer pour $n+1$.

  $$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2.$$

  (en appliquant l'hérédité aux n premiers termes)

  $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

  $$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

  Le résultat est donc bien démontré pour $n+1$:

  $$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

  Au final on a établi par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Suites

Montrons par récurrence que la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$ vérifie $0\leq u_{n+1}\leq u_n$ pour tout $n\geq0$.

- Initialisation :
  $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \leq 3$. On a bien $0 \leq u_1 \leq u_0$ et la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Hérédité :
  On suppose cette propriété vraie à un rang quelconque n, soit :
  $0 \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \leq u_n$. On cherche alors à la montrer au rang $n+1$.
  On peut d'abord constater que u_{n+1} étant supérieur ou égal à 0, $u_{n+1} + 1$ est un nombre positif et donc que $\sqrt{u_{n+1} + 1}$ a bien un sens. On peut donc calculer $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1} + 1}$ et comme pour toute racine carrée $0 \leq u_{(n+1)+1}$.
  D'après l'hérédité, on a $u_{n+1} \leq u_n$ et donc $u_{n+1} + 1 \leq u_n + 1$. D'autre part, on sait que la fonction racine carrée est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$. On peut donc écrire : $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1} + 1} \leq \sqrt{u_n + 1}$, et on a donc : $0 \leq u_{(n+1)+1} \leq u_{n+1}$.
  Au final on a établi par récurrence que la suite $\left(u_n\right)$ vérifie $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, pour tout n, ce qui permet d'en déduire que la suite est décroissante.
  Au final on a établi par récurrence que la suite (u_n) vérifie $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, pour tout n, ce qui permet d'en déduire que la suite est décroissante.

Index

Les maths expliquées simplement

Ce livre s'adresse à toutes celles et ceux qui veulent **se remettre aux mathématiques.**
Il ne nécessite pas de connaissances préalables autres que les quatre opérations et couvre la plupart des éléments d'algèbre et d'analyse enseignés au collège et au lycée.
Écrit pour des adultes et organisé suivant les notions présentées et non en fonction du découpage induit par les programmes de l'Éducation nationale, **il constitue une réelle alternative aux manuels scolaires**.
Il permet ainsi à tout public de redémarrer les mathématiques, par simple envie ou pour un besoin précis, **et en particulier à un parent d'accompagner son enfant dans les classes du secondaire**.
Son objectif est avant tout d'offrir au lecteur du sens et du plaisir dans son retour aux mathématiques.

Jean-Marc Buret a effectué une carrière de cadre en entreprise puis d'entrepreneur, avant de se consacrer à l'enseignement depuis 2013. Il est professeur en collège et lycée à Paris. Ses réflexions pédagogiques se nourrissent de ses observations au quotidien et visent à marier le cadre théorique proposé par les mathématiques et la volonté de transmettre le goût de leur pratique.

www.editions-ellipses.fr



